Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

ТЕОРЕМЫ О РЕЗОНАНСЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 XII 1948)

1. Пусть Ω означает множество всех функций $\omega(u)$, удовлетворяющих следующим четырем условиям: 1) $\omega(u)$ непрерывна при $0 \leqslant u < \infty$, 2) $0 < \omega(u') \leqslant \omega(u'')$ при $0 < u' \leqslant u''$, 3) $\omega(u_1+u_2) \leqslant \omega(u_1) + \omega(u_2)$, 4) $\omega(0)=0$.

Функциональные пространства $\tilde{C}$, $\tilde{L}$ и $\tilde{L}^M$ определим как в [1]. Если $f(t)$ есть функция, определенная при $-\infty < t < \infty$, то f^α означает функцию, определенную формулой: $f^\alpha(t) \equiv f(t+\alpha)$. Если E есть нормированное пространство, то $\|f\|_E$ означает норму элемента $f \in E$.

Лемма 1. *Для любой функции* $\omega \in \Omega$ *существует конечный неотрицательный предел* $\lim\limits_{u \to +0} \frac{u}{\omega(u)}$.

2. Пусть E есть функциональное пространство. Рассмотрим следующие аксиомы.

(1) Элементы E суть функции, принимающие вещественные значения, определенные при $-\infty < t < \infty$.

(2) При обычном определении сложения функций и умножения функции на число E есть пространство типа (B).

(3) Если $f \in E$, то $f^\alpha \in E$ при $-\infty < \alpha < \infty$ и $\|f^\alpha\|_E \leqslant K_E \|f\|_E$, где константа K_E зависит только от E, а не от f и α.

(4) Элементы E суть функции, имеющие период 2π, суммируемые на $(-\pi, \pi)$.

(5) Существует множество функций $G = G_E$, имеющих период 2π и суммируемых на $(-\pi, \pi)$, такое, что

a) если $f \in E$ и $g \in G$, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |fg|\, dt < +\infty$;

b) если $f \in E$, то

$$\|f\|_E = \sup_{g \in G} \int\limits_{-\pi}^{\pi} fg\, dt;$$

c) если $g \in G$, то $g^\alpha \in G$ при $-\infty < \alpha < \infty$;

d) если $g \in G$, а $h(t)$ есть 2π-периодическая и измеримая функция такая, что $|h(t)| \leqslant 1$ почти везде, то $gh \in G$.

(6) E содержит все тригонометрические полиномы.

Если E есть пространство, удовлетворяющее первым ν из этих аксиом ($\nu = 1, 2, \ldots, 6$), то говорим, что E есть пространство типа $\tilde{F}_\nu$.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что если E типа $\tilde{F}_5$, то $K_E = 1$ и

$$\|f\|_E = \sup_{g \in G} \int_{-\pi}^{\pi} fg\,dt = \sup_{g \in G} \left| \int_{-\pi}^{\pi} fg\,dt \right| = \sup_{g \in G} \int_{-\pi}^{\pi} |fg|\,dt.$$

З а м е ч а н и е 2. Легко видеть, что $\tilde{C}$, $\tilde{L}$, $\tilde{L}^M$ суть пространства типа $\tilde{F}_6$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть E — пространство типа $\tilde{F}_3$. Тогда при $\omega \in \Omega$, $f \in E$ положим

$$M_{\omega, f} \equiv M_{\omega, f, E} \equiv \sup_{0 < h < \infty} \frac{\|f^h - f\|_E}{\omega(h)}$$

и обозначим через E_ω множество тех $f \in E$, для которых $M_{\omega, f, E} < +\infty$, а через E^*_ω — множество тех $f \in E$, для котсрых

$$\lim_{h \to +0} \frac{\|f^h - f\|_E}{\omega(h)} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Очевидно, что $E^*_\omega \subset E_\omega$.

О п р е д е л е н и е 2. Если пространство E типа $\tilde{F}_3$ и $\omega \in \Omega$, то введем в множестве E_ω норму по формуле

$$\|f\|_{E_\omega} = \|f\|_E + M_{\omega, f, E}. \tag{1}$$

Множество E_ω с введенной в нем нормой (1) будем называть пространством E_ω.

О п р е д е л е н и е 3. Если пространство E типа $\tilde{F}_3$ и $\omega \in \Omega$, то введем в множестве E^*_ω норму по формуле

$$\|f\|_{E^*_\omega} = \|f\|_{E_\omega}. \tag{2}$$

Множество E^*_ω с введенной в нем нормой (2) будем называть пространством E^*_ω.

Л е м м а 2. *Если E есть пространство типа $\tilde{F}_3$, то E_ω и E^*_ω суть пространства типа $\tilde{F}_3$.*

Т е о р е м а 1. *Пусть E — пространство типа $\tilde{F}_3$. Пусть функция $\omega \in \Omega$, последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\text{a)} \lim_{u \to +0} \frac{u}{\omega(u)} = 0; \qquad \text{b)} \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0; \qquad \text{c)} \|f_n\|_E \leqslant \omega(\varepsilon_n);$$

$$\text{d)} \|f_n^h - f_n\|_E \leqslant \frac{\omega(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} h \quad \textit{при} \quad 0 < h < \infty.$$

Пусть $\mathscr{E}$ — пространство типа (B), $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность линейных операций из E в $\mathscr{E}$, U — линейная операция из E в $\mathscr{E}$. Тогда:

1) *Если*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|U_n(f_n)\|_{\mathscr{E}} > 0,$$

то существует $f \in E_\omega$ такая, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|U(f) - U_n(f)\|_{\mathscr{E}} > 0.$$

2) *Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| U_n(f_n) \|_{\mathscr{E}} = +\infty,$$

то существует $f \in E^*_\omega$ *такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| U_n(f) \|_{\mathscr{E}} = +\infty.$$

3. Положим $D_\nu(t) \equiv \dfrac{\sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t}$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots, -\infty < t < \infty$, и пусть $s_\nu(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_\nu(t)\, dt$ есть ν-я частная сумма ряда Фурье суммируемой на $(-\pi, \pi)$ и 2π-периодической функции f.

Определение 4. Пусть

$$\begin{matrix} k_0^{(0)} & & & & \\ k_0^{(1)} & k_1^{(1)} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_0^{(n)} & k_1^{(n)} & \ldots & k_n^{(n)} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \qquad (\mathfrak{A})$$

есть бесконечная треугольная матрица; положим

$$D_n^{(\mathfrak{A})}(t) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu^{(n)} D_\nu(t),$$

$$L_n^{(\mathfrak{A})} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} | D_n^{(\mathfrak{A})}(t) |\, dt,$$

$$\sigma_n^{(\mathfrak{A})}(f) \equiv \sigma_n^{(\mathfrak{A})}(f, x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu^{(n)} s_\nu(f, x).$$

Определение 5. Пусть G и H суть два функциональных пространства типа (B), каждое из которых содержит все тригонометрические полиномы, $U(f) \equiv U(f, x)$ — линейная операция из G в H. Говорим, что U есть линейная тригонометрическая полиномиальная операция типа $\mathfrak{A}$ и порядка n, если выполнены следующие два условия:

1) Для любой функции $f \in G$ $U(f, x)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n$.

2) Если $T_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, то $U(T_n, x) = \sigma_n^{(\mathfrak{A})}(T_n, x)$.

Замечание. Очевидно, что если матрица $\mathfrak{A}$ такова, что

$$k_\nu^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = n, \\ 0 & \text{при } \nu < n, \end{cases}$$

то мы получаем операции, рассмотренные в ([1]). Простейший пример тригонометрической полиномиальной операции типа $\mathfrak{A}$ и порядка n есть операция

$$U(f, x) = \sigma_n^{(\mathfrak{A})}(f, x).$$

Другой пример доставляет суммирование интерполяционного тригонометрического процесса с равноотстоящими узлами, рассмотренное в [2].

Теорема 2. *Пусть E и $\mathscr{E}$ суть пространства типа* $\widetilde{F}_6$, U_n — *линейная тригонометрическая полиномиальная операция из E в $\mathscr{E}$ типа $\mathfrak{A}$ порядка n. Тогда*

$$\| U_n \| \geqslant \| \sigma_n^{(\mathfrak{A})} \|_E^{\mathscr{E}},$$

где правая часть означает норму $\sigma_n^{\mathfrak{A}}(f, x)$ *как операции из E в $\mathscr{E}$.*

Замечание. Если $E = \mathscr{E} = \widetilde{C}$, то $\| \sigma_n^{(\mathfrak{A})} \|_E^{\mathscr{E}} = L_n^{(\mathfrak{A})}$. Если $E = \mathscr{E} = \widetilde{L}$, то снова $\| \sigma_n^{(\mathfrak{A})} \|_E^{\mathscr{E}} = L_n^{(\mathfrak{A})}$. Таким образом, теоремы 1 и 3 работы [1] суть частные случаи настоящей теоремы.

Теорема 3. *Пусть E и $\mathscr{E}$ суть пространства типа* $\widetilde{F}_6$, $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность линейных тригонометрических полиномиальных операций из E в $\mathscr{E}$ типа $\mathfrak{A}$ порядка n, U — линейная операция из E в $\mathscr{E}$* и $\omega \in \Omega$. *Тогда*

1) *Если* $\lim\limits_{u \to +0} \frac{u}{\omega(u)} = 0$ *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \| \sigma_n^{(\mathfrak{A})} \|_E^{\mathscr{E}} > 0,$$

то существует $f \in E_\omega$ *такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| U(f) - U_n(f) \|_{\mathscr{E}} > 0.$$

2) *Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right) \| \sigma_n^{(\mathfrak{A})} \|_E^{\mathscr{E}} = +\infty,$$

то существует $f \in E_\omega$ $\left(\text{а если } \lim\limits_{u\to+0} \frac{u}{\omega(u)} = 0, \text{ то и } f \in E_\omega^*\right)$ *такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| U_n(f) \|_{\mathscr{E}} = +\infty.$$

Поступило
27 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Лозинский, ДАН, 61, № 2 (1948). [2] С. М. Лозинский, Математ. сб., 14, 3, 175 (1944).