Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. И. КОРЕНБЛЮМ

О ТЕОРЕМАХ ТАУБЕРОВСКОГО ТИПА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XI 1948)

В предыдущей заметке (1) были рассмотрены некоторые специальные коммутативные нормированные кольца на локально компактной абелевой группе G, удовлетворяющей второй аксиоме счетности. При этом были установлены теоремы, выясняющие общий вид линейного функционала на изучаемых кольцах и структуру множества их максимальных идеалов, а также обобщающие известные результаты Винера — Годемана и Берлинга — Годемана (2).

Полученные результаты применяются в настоящей заметке к установлению ряда теорем тауберовского типа.

1°. В соответствии с обозначениями предыдущей заметки (1), мы будем рассматривать классы Ξ^*, Ξ^{**} функций $\theta(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ и пространства M^p, R^p, $\tilde{R}$ для того случая, когда G является аддитивной группой действительных чисел. Из теорем 2, 3 и 5 (1) нетрудно вывести следующие общие тауберовские теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\theta(x)\in\Xi^*$, $k(x)\in R^p$, $f(x)\in M^p$ $(p>1)$.
Тогда из соотношений

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)f(x)\,dx = A\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,e^{iux}\,dx \neq 0 \quad (-\infty<u<\infty) \tag{2}$$

следует

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x+y)f(x)\,dx = A\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x)\,dx, \tag{3}$$

где $k_1(x)$ — *произвольная функция из* R^p.

Обратно, если для некоторой функции $k(x)\in R^p$ *из* $f(x)\in M^p$, $k_1(x)\in R^p$ *и* (1) *всегда следует* (3), *то справедливо* (2).

Теорема 1'. *Пусть* $\theta(x)\in\Xi^{**}$ *и полунепрерывна снизу, а* $k(x)\in\tilde{R}$.

Введем класс W *комплексных функций* $\sigma(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, *имеющих ограниченную вариацию на каждом конечном интервале и удовлетворяющих условию*

$$\sup_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x+y)\,|\,d\sigma(x)\,|<\infty. \tag{4}$$

Тогда из соотношений

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)\,d\sigma(x) = A\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,dx, \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\, e^{iux}\, dx \neq 0 \quad (-\infty < u < \infty) \tag{6}$$

следует

$$\lim_{y \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x+y)\, d\sigma(x) = A \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x)\, dx, \tag{7}$$

где $k_1(x)$ — *произвольная функция из* $\tilde{R}$.

Обратно, если для некоторой функции $k(x) \in \tilde{R}$ *из* $\sigma(x) \in W$, $k_1(x) \in \tilde{R}$ *и* (5) *всегда следует* (7), *то справедливо* (2).

Полагая в теореме 1 $\theta(x)$ равной характеристической функции интервала (0, 1), получим теорему:

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *принадлежит степановскому классу* S^p $(p > 1)$:

$$\sup_{-\infty < y < \infty} \int_{y}^{y+1} |f(x)|^p\, dx < \infty,$$

а $k_1(x)$, $k_2(x)$ — *функции, представимые в виде*:

$$k_i(x) = \tau_i(x)\, [\sigma_i(x+1) - \sigma_i(x)]^{1/p} \quad (i = 1, 2),$$

где $\tau_i(x) \in L^q(-\infty, \infty)$, *а* $\sigma_i(x)$ — *неубывающие ограниченные функции на* $(-\infty, \infty)$. *Пусть, далее,*

$$\lim_{y \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x+y)\, f(x)\, dx = A \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x) dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x)\, e^{iux}\, dx \neq 0 \quad (-\infty < u < \infty).$$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{y \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x+y) f(x)\, dx = A \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x)\, dx.$$

2°. Важный класс теорем тауберовского типа для сингулярных интегралов связан с условием:

$$\sup_{0 < h < \infty} \frac{1}{h} \int_{0}^{h} |f(x)|^p\, dx < \infty \quad (p \geqslant 1). \tag{8}$$

Совокупность измеримых на $(0, \infty)$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (8), мы будем обозначать через $\mathfrak{T}_p$. Полагая в теоремах 1 и 1'

$$\theta(x) = \begin{cases} e^x & (x < 0), \\ 0 & (x \geqslant 0) \end{cases}$$

и производя замену переменных $\xi = e^x$, $\eta = e^y$, нетрудно вывести тауберовские теоремы для классов $\mathfrak{T}_p$. Примером может служить следующая

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in \mathfrak{T}_p$ $(p > 1)$. *Тогда при выполнении условия*

$$\lim_{x \to 0\,(\infty)} f(x) = A \qquad (C, \alpha) \quad \left(\alpha > \frac{1}{p}\right) \tag{9}$$

$\left(\textit{или, что то же, } \lim\limits_{\varepsilon \to 0\,(\infty)} \frac{1}{\alpha\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)^{\alpha - 1} f(x)\, dx = A\right)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \to \infty\,(0)} \varepsilon \int\limits_0^\infty k(\varepsilon x) f(x)\, dx = A \int\limits_0^\infty k(x)\, dx, \tag{10}$$

где $k(x)$ — *произвольная измеримая на* $(0, \infty)$ *функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^\infty \left[-\frac{d}{dx} \breve{k}(x)\right]^{\frac{1}{q}} dx < \infty \quad \left(q = \frac{p}{p-1}\right);$$

при этом $\breve{k}(x)$ *обозначает наибольшую конвексную функцию на* $(0, \infty)$, *не превышающую* $\int\limits_x^\infty |k(t)|^q\, dt$.

Теорема остается справедливой при $p = 1$, $\alpha = 1$ *для непрерывных на* $(0, \infty)$ *функций* $k(x)$, *удовлетворяющих условию:*

$$\int\limits_0^\infty \{\max_{x \leqslant t < \infty} |k(t)|\}\, dx < \infty.$$

Если, кроме того, $f(x) \geqslant 0$, *то* $k(x)$ *может иметь конечное число точек разрыва первого рода.*

Из теоремы 3 (при $p = 1$) непосредственно следует ряд результатов Винера [3], Бохнера и Харди [4], Якоба [5], Такагаши [6] и др.

Далее, из теоремы 3 нетрудно вывести следующую теорему, обобщающую на интегралы Фурье некоторые результаты Харди и Литтлвуда [7] для рядов Фурье.

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, *а* $F(y)$ — *преобразование Фурье функции* $f(x)$:

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \quad (p = 1),$$

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{A \to \infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \quad (1 < p \leqslant 2).$$

Обозначим

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2s\} \quad (t > 0).$$

Пусть при некотором фиксированном x $\Phi(t) \in \mathfrak{T}_r$ $(r > 1)$.
Тогда следующие утверждения эквивалентны:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)\, e^{ixy}\, dy = s \quad (C, \alpha) \quad (\alpha > 0)$$

$$b)\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,e^{ixy}\,dy = s \quad (A),$$

$$c)\quad \lim_{t\to 0}\Phi(t) = 0 \quad (C, \beta) \qquad \left(\beta > \frac{1}{r}\right).$$

3°. С помощью результатов предыдущей статьи ([1]) устанавливаются также общие тауберовские теоремы для процессов суммирования, определяемых интегралами Стильтьеса. По характеру тауберовских условий эти теоремы сходны с некоторыми результатами Сасса ([8], [9]), относящимися к рядам Дирихле. В качестве примера приведем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi(x)$ — *конвексная функция на* $[0, \infty)$, *удовлетворяющая условиям*:

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) > -\infty, \quad \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx < \infty,$$

а $\sigma(x)$—*функция ограниченной вариации на каждом конечном сегменте* $[0, A]$, *причем* $\sigma(0) = 0$. *Пусть, далее,*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\infty}\varphi(\varepsilon x)\,d\sigma(x) = s, \tag{11}$$

причем интеграл в левой части (11) *абсолютно сходится при любом* $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\sigma(x)\,dx = s \quad (\delta > 0), \tag{12}$$

если выполнены следующие условия:

A. $\dfrac{\sigma(x)}{x} \to 0 \quad (x \to \infty)$.

B. $\displaystyle\int_0^h x^p\,[\sigma(x+\delta) - \sigma(x)]_+^p\,dx = O(h) \quad (x \to \infty,\ p > 1)$.

C. *Функция* $\displaystyle\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(x)\,x^{z-1}\,dx$, *которая является регулярной аналитической функцией* z *в полосе* $0 < \operatorname{Re} z < 1$, *может быть аналитически продолжена на мнимую ось во всех точках, кроме, быть может,* $z = 0$, *причем* $\Phi(z) \neq 0$ *на мнимой оси.*

В частном случае, когда $\varphi(x) = e^{-x}$ (*в этом случае* C *выполняется*), *теорема справедлива и без условия* A.

Если, в частности, вся масса функции распределения $\sigma(x)$ сконцентрирована в целочисленных точках $x = n$, а $\varphi(x) = e^{-x}$, то теорема 5 дает найденное Сассом ([8]) обобщение известной тауберовской теоремы Харди и Литтлвуда для метода Абеля.

Поступило
18 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Коренблюм, ДАН, 64, № 3 (1949). [2] R. Godement, C. R., 223, 16 (1946). [3] N. Wiener, Acta Math., 55, No. 2—3 (1930). [4] S. Bochner and G.H. Hardy, J. London Math Soc., 1, 240 (1926). [5] M. Jacob, ibid., 3, 182 (1928). [6] Takahashi, Sci. Rep. Tohoku Univ., 1 s, 24, 150 (1935). [7] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, J. London Math. Soc., 6. 9 (1931). [8] O. Szász, Duke Math. J., 1, 105 (1935). [9] O. Szász, Trans. Am. Math. Soc., 39, 117 (1936).