Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

И. А. ЕГОРОВА

# О ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ В ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 XII 1948)*

1°. Обозначим через $L_n(f, x)$ интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)$

$$L_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} l_k^n(x) f(x_k^{(n)}),$$

где

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}$$

и

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k^{(n)}).$$

Если для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых $(R)$ и совпадающих в некоторой окрестности точки $x_0$, выполняется соотношение

$$L_n(f, x_0) - L_n(g, x_0) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то говорят, что в точке $x_0$ имеет место принцип локализации среди функций, интегрируемых $(R)$. Известно, что при интерполировании по равноотстоящим узлам принцип локализации не имеет места даже среди непрерывных функций, как показывает пример двух функций $y = x$ и $y = |x|$. С другой стороны, известно, что при тригонометрическом интерполировании по равноотстоящим узлам принцип локализации имеет место среди функций, интегрируемых $(R)$.

И. П. Натансон поставил вопрос: какова должна быть система узлов интерполирования для того, чтобы принцип локализации имел место среди функций, интегрируемых $(R)$?

В настоящей работе дается ответ на этот вопрос.

Доказательство теоремы 1 приводится с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям Полиа в его работе о сходимости механических квадратур ([1]). Обозначим основной промежуток интерполирования через $[A, B]$ и назовем, следуя Полиа, групповым интервалом $I$ сумму конечного числа интервалов на $[A, B]$.

Введем функцию группового интервала

$$E(I) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{I} |l_k^{(n)}(x_0)|,$$

где сумма распространяется на те индексы $k$, для которых $x_k^{(n)} \in I$. В формулировке теоремы 1 через $[a, b]$ обозначен любой промежуток, содержащийся в $[A, B]$ и не содержащий точки $x_0 \in [A, B]$.

Теорема 1. *Для того чтобы при интерполировании по узлам $x_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имел место принцип локализации в точке $x_0$ среди функций, интегрируемых $(R)$, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) $\sum\limits_{[a, b]} l_k^{(n)}(x_0) \to 0$ *при* $n \to \infty$;

2) $\sum\limits_{[a, b]} | l_k^{(n)}(x_0) | < M$, *где* $M$ — *константа*;

3) *Для всякой последовательности групповых интервалов такой, что* $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_i \supset \ldots$, $x_0 \overline{\in} I_1$ *и* $mI_i \to 0$ *при* $i \to \infty$, *имеем*

$$E(I_i) \to 0 \quad \text{при } i \to \infty.$$

2°. Будем рассматривать в качестве узлов интерполирования корни ортогональных полиномов Якоби $P_n(\alpha, \beta, x)$, определяемых в $[-1, 1]$ весом

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,$$

где $\alpha > -1$ и $\beta > -1$. Корни этих полиномов обозначим

$$x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}.$$

В дальнейшем $x_0$ обозначает любую внутреннюю точку сегмента $[-1, 1]$.

В таком случае справедливы следующие соотношения с сохранением предшествующих обозначений:

$$\max_{[a, b]} | l_k^{(n)}(x_0) | \leqslant \frac{C_1}{n}, \tag{I}$$

где $C_1$ — константа;

$$N(a, b, n) = C_2 n (a' - b') + n\alpha_n, \tag{II}$$

$N(a, b, n)$ — число узлов $x_k^{(n)} \in [a, b]$, $C_2$ — константа, $a' = \arccos a$, $b' = \arccos b$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$;

$$\sum_{k=1}^{n} | l_k^{(n)}(x_0) | < C_3 n, \tag{III}$$

где $C_3$ — константа.

Можно проверить, что выполнение (I) и (II) обеспечивает выполнение второго и третьего условий теоремы 1, а выполнение (I), (II) и (III) обеспечивает выполнение первого условия теоремы 1. Для полиномов Якоби (II) следует из того, что для всякого $[a, b]$, где $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N(a, b, n)}{n} = \frac{a' - b'}{\pi}$$

(([2]), стр. 303), а (1) может легко быть получено с помощью асимптотических формул для $P_n(\alpha, \beta, x)$ и $P'_n(\alpha, \beta, x_k^{(n)})$ (([2]), стр. 190 и 232).

Отсюда следует

Теорема 2. *Если в качестве узлов интерполирования брать корни ортогональных полиномов Якоби, то среди функций, интегрируемых (R), имеет место принцип локализации во всякой внутренней точке промежутка* [—1, 1].

С помощью теоремы 2 можно перенести на интерполирование по корням полиномов Якоби признак сходимости интерполяционного процесса Лагранжа в точке $x_0$ для интегрируемых (R) функций, который был дан И. П. Натансоном для тригонометрического интерполирования по равноотстоящим узлам (3):

Теорема 3. *Пусть* $f(x)$ *интегрируема* (R) *в* $[-1, 1]$. *Если* $-1 < x_0 < 1$ *и существует функция* $\varphi(x)$, *возрастающая в* $[-1, x_0]$ *и убывающая в* $[x_0, 1]$, *удовлетворяющая условиям*

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| < \varphi(x)$$

*и*

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx < +\infty,$$

*то*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f, x_0) = f(x_0).$$

Поступило
27 XI 1948

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. С. Безикович, Исчисление конечных разностей, 1939, стр. 255.
[2] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, Am. Math. Soc. Colloquium Publications, 23, 1939.
[3] И. П. Натансон, ДАН, 42, № 2 (1944).