Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

И. С. ГРАДШТЕЙН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ ПРИ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 XII 1948)

В последнее время появился ряд работ ([1–4], [6]) о так называемых вырождающихся в пределе дифференциальных уравнениях, т. е. об уравнениях, в которых при производных некоторых искомых функций (когда речь идет о системах уравнений первого порядка) или у старших производных (когда речь идет об одном уравнении высшего порядка) имеются бесконечно малые множители. Данная статья посвящена этому же вопросу и является в некотором смысле обобщением работ А. Н. Тихонова ([4]) и K. O. Friedrics'a и W. R. Watson'a ([6]).

Рассмотрим на отрезке $[t_0, T]$ систему $\mu+m$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} 0=f_i(\bar{x}, t) = \sum_{j=1}^{\mu} x_j g_{ij}(x_{\mu+1}, \ldots, x_{\mu+m}, t) + g_{i0}(x_{\mu+1}, \ldots, x_{\mu+m}, t) \\ (i=1, 2, \ldots, \mu); \\ \frac{dx_i}{dt} = f_i(\bar{x}, t) \quad (i=\mu+1, \mu+2, \ldots, \mu+m) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(символ $\bar{x}$ означает точку $x_1, \ldots, x_{\mu+m}$ пространства $\mu+m$ измерений).

Пусть через точку $\bar{x}^{(0)}(t_0)$, t_0 проходит одна и только одна интегральная кривая $\bar{x}=\bar{x}^{(0)}(t)$ этой системы уравнений, причем пусть функции $x_i^{(0)}(t)$ обладают на отрезке $[t_0, T]$ непрерывными производными.

В гиперплоскости $t=t_1$ определим ε-окрестность интегральной кривой $\bar{x}=\bar{x}^{(0)}(t)$ неравенствами

$$|x_i - x_i^{(0)}(t_1)| \leqslant \varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, \mu). \tag{2}$$

Эту окрестность будем обозначать $U(\varepsilon, t_1)$. Совокупность окрестностей $U(\varepsilon, t)$ всех точек отрезка $[t_0, T]$ кривой $\bar{x}=\bar{x}^{(0)}(t)$ образует некоторую окрестность этой кривой, которую мы будем обозначать $U(\varepsilon; [t_0, T])$.

Пусть для данного ε число δ обладает тем свойством, что $|x_i^{(0)}(t) - x_i^{(0)}(t_0)| < \varepsilon$ $(i=1, 2, \ldots, \mu)$ для всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\delta$.

Присоединим к системе (1) совокупность μ чисел a_i $(i=1, 2, \ldots, \mu)$. μ^2 функциям $g_{ij}(x_{\mu+1}^{(0)}(t), \ldots, x_{\mu+m}^{(0)}(t), t)$ $(i, j=1, 2, \ldots, \mu)$, отрезку

$[t_0, t_0+\delta]$, на котором эти функции определены, μ числам a_i ($i = 1, 2, \ldots, \mu$) и числу ε ставится в соответствие по некоторому закону, который указан в конце статьи, совокупность неотрицательных чисел

$$A_i(\varepsilon; [t_0, t_0+\delta]) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Символом $N(\varepsilon; [t_0, t_0+\delta])$ обозначим множество точек $\bar{x}, t$ пространства $(\mu + m + 1)$ измерений, удовлетворяющих следующим условиям

$$\begin{gathered} t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta; \quad |x_i - x_i^{(0)}(t_0)| \leqslant A_i(\varepsilon; [t_0, t_0+\delta]) + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ |x_i - x_i^{(0)}(t_0)| \leqslant \varepsilon \quad (i = \mu+1, \ldots, \mu+m). \end{gathered} \tag{3}$$

Теорема. *Пусть на множестве* $R: t_0 \leqslant t \leqslant T;\ 0 < \eta \leqslant \eta_0$ *дана система дифференциальных уравнений*

$$\begin{gathered} \eta \frac{dX_i}{dt} = F_i(\bar{X}, t, \eta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \frac{dX_i}{dt} = F_i(\bar{X}, t, \eta) \qquad (i = \mu+1, \mu+2, \ldots, \mu+m) \end{gathered} \tag{4}$$

при начальных условиях

$$\begin{gathered} X_i(t_0, \eta) = x_i^{(0)}(t_0) + a_i + O(\eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ X_i(t_0, \eta) = x_i^{(0)}(t_0) + O(\eta) \quad (i = \mu+1, \ldots, \mu+m), \end{gathered} \tag{5}$$

где a_i — числа, входившие ранее в определение чисел A_i.

Пусть

$$F_i(\bar{X}, t, \eta) = f_i(\bar{X}, t) + \eta r_i(\bar{X}, t, \eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu+m), \tag{6}$$

где $r_i(\bar{X}, t, \eta)$ — функции, ограниченные на множестве $U(4\varepsilon; [t_0, T]) + N(4\varepsilon; [t_0, t_0+\delta])$.

Кроме того, предположим, что функции $f_i(\bar{x}, t)$ и $g_{ij}(\bar{x}, t)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем переменным на множестве $U(4\varepsilon; [t_0, T]) + N(4\varepsilon; [t_0, t_0+\delta])$.

Если при этих условиях корни уравнения

$$\operatorname{Det}[\{g_{ij}(x_{\mu+1}, \ldots, x_{\mu+m}, t)\} - w(t)E] = 0, \tag{7}$$

где функции g_i рассматриваются только в точках множества $U(4\varepsilon; [t_0, T])$, не кратны и, кроме того, на том же множестве

$$\sup \operatorname{Re} w_i(t) < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{8}$$

то

$$\begin{gathered} \lim_{\eta \to +0} X_i(t, \eta) = x_i^{(0)}(t) \quad (t_0 < t \leqslant T;\ i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ \lim_{\eta \to +0} X_i(t, \eta) = x_i^{(0)}(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T;\ i = \mu+1, \ldots, \mu+m). \end{gathered} \tag{9}$$

Числа $A_i(\varepsilon; [t_0, t_0+\delta])$, о которых речь шла выше, определяются следующим образом.

Рассмотрим семейство систем линейных однородных дифференциальных уравнений, зависящее от $m+1$ параметра

$$\frac{dY_i}{dt}=\sum_{j=1}^{\mu} Y_j g_{ij}(x_{\mu+1},\ldots,x_{\mu+m},\theta) \quad (i=1,2,\ldots,\mu); \tag{10}$$

параметры $x_{\mu+1},\ldots,x_{\mu+m},\theta$ могут принимать любые значения на отрезках

$$x_{\mu+i}^{(0)}(t_0)-\varepsilon\leqslant x_{\mu+i}\leqslant x_{\mu+i}^{(0)}(t_0)+\varepsilon \quad (i=1,2,\ldots,m); \quad t_0\leqslant\theta\leqslant t_0+\delta.$$

Пусть k_l — корни характеристического уравнения системы (10); они являются функциями указанных параметров. В силу сформулированного выше свойства функций g_{ij} эти корни k_l не кратны ни при каких значениях параметров $x_{\mu+1},\ldots,x_{\mu+m},\theta$. Решение $Y_i(t)$ данной системы (10) при начальных условиях $Y_i(t_0)=\alpha_i$, где числа α_i могут принимать любые значения на отрезках $a_i-\varepsilon\leqslant\alpha_i\leqslant a_i+\varepsilon$, можно записать так:

$$Y_i(t)=\sum_{j=1}^{\mu} C_{ij}(x_{\mu+1},\ldots,x_{\mu+m},\theta,\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu)\,e^{k_j t}. \tag{11}$$

Числа $A_i(\varepsilon;[t_0,t_0+\delta])$ определяются равенствами

$$A_i(\varepsilon;[t_0,t_0+\delta])=\sup\sum_{j=1}^{\mu}|C_{ij}(x_{\mu+1},\ldots,x_{\mu+m},\theta,\alpha_1,\ldots,\alpha_\mu)|.$$

При доказательстве этой теоремы вначале я пользовался методом G. D. Birkhoff'а ([5]), а затем методом K. O. Friedrics'а и W. R. Watson'а.

Поступило
22 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Градштейн, ДАН, 53, № 5 (1946). [2] И. С. Градштейн, Изв. АН СССР, ОТН, № 5 (1947). [3] И. С. Градштейн, ДАН, 59, № 5 (1948). [4] А. Н. Тихонов, Матем. сб., 22 (64) (1948). [5] G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 2, 219 (1908). [6] K. O. Friedrics and W. R. Watson, Duke Math. J., 13, No. 3, 367 (1946). [7] Yü-Why Tschen, Compositio Math., 2, 378 (1935).