Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. О. ГЕЛЬФОНД

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ СЛУЧАЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ ФУНКЦИЙ

Пусть L — последовательность монотонно и неограниченно возрастающих действительных чисел $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, а M — последовательность точек $\tau_k = (\beta_{1,k}, \beta_{2,k}, \ldots, \beta_{\nu,k})$ ν-мерного пространства, всюду плотная в ν-мерном единичном кубе $0 \leqslant \beta_{i,k} \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $k = 1, 2, \ldots$ Мы будем говорить, что дробные доли функций $f_1(y)$, $f_2(y), \ldots, f_\nu(y)$ будут (φ, M) всюду плотно распределены. если совокупность неравенств

$$0 \leqslant \{f_i(y)\} - \beta_{i,k} \leqslant \varphi(y), \quad i = 1, \ldots, \nu, \tag{1}$$

где $\varphi(y)$ — любая заданная монотонно убывающая функция, $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant 1$, $\lim\limits_{y \to \infty} \varphi(y) = 0$, будет иметь для всякой точки τ_k бесчисленное множество решений в числах y, принадлежащих к L. Свойством (φ, M) всюду плотного распределения дробных долей, как это будет видно, обладает достаточно широкий класс функций.

Теорема 1. *Пусть ν функций $f_1(t_1, y), \ldots, f_\nu(t_\nu, y)$ удовлетворяют следующим условиям:* (1) *функция $f_i(t_i, y)$ определена для всех значений y, принадлежащих к L на сегменте $a_i \leqslant t_i \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$;* (2) *$\partial f_i / \partial t_i = f_i'(t_i, y_k)$ непрерывна и монотонно не убывает на сегменте $[a_i, b_i]$, $f_i'(a_i, y_k) \geqslant 1$ для всех i, k;* (3) *при фиксированном t_i на сегменте $[a_i, b_i]$ $f_i'(t_i, y_k)$ монотонно и неограниченно возрастает вместе с k, другими словами, $f_i(t_i, y_k) \to \infty$, когда $k \to \infty$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.*

Тогда, при любой, но заданной последовательности M, любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и любой, но заданной функции $\varphi(t)$ на сегментах $[c_i, d_i]$, $d_i = c_i + \varepsilon$, $c_i \geqslant a_i$, $d_i \leqslant b_i$, найдутся точки α_i, $c_i \leqslant \alpha_i \leqslant d_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, такие, что дробные доли ν функций $f_1(\alpha_1, y), f_2(\alpha_2, y), \ldots, f_\nu(\alpha_\nu, y)$ будут (φ, M) всюду плотно распределены.

Для доказательства нашей теоремы, прежде всего, с помощью последовательности M точек τ_k строим последовательность M' точек μ_k, отличающуюся от M только повторением точек τ_k, другими словами, M' будет иметь вид $\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_1, \ldots$

Координаты точки μ_s обозначаем буквами $\gamma_{1,s}, \gamma_{2,s}, \ldots, \gamma_{\nu,s}$. Выбираем теперь бесконечную последовательность действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, принадлежащих к L, так, чтобы выполнялись условия:

$$f_i'(a_i, x_1) \geqslant \frac{2}{\varepsilon}, \quad f_i'(a_i, x_{k+1}) \geqslant \frac{2}{\varepsilon} \frac{f_i'(b_i, x_k)}{\varphi(x_k)}, \quad k \geqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu. \tag{2}$$

Этот выбор возможен благодаря условию (3) нашей теоремы.

Вводим, далее, в рассмотрение величины $U_{i,k}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $k = 1, 2, \ldots$, определяя их из соотношений

$$U_{i1} = c_i,\ U_{i,k+1} = U_{i,k} + \frac{z_{i,k}}{f'_i(c_i, x_k)},\ 0 \leqslant z_{i,k} \leqslant 1, \tag{3}$$

где переменные $z_{i,k}$ пока остаются неопределенными. Из неравенств (2) и условий нашей теоремы непосредственно следует, что $U_{i,k+1} \leqslant$ $\leqslant U_{i,k} + (\varepsilon/2)^k$, что приводит к неравенствам

$$c_i \leqslant U_{i,k} < c_i + \varepsilon,\quad i = 1, 2, \ldots, \nu,\quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Переменные t_i, $1 \leqslant i \leqslant \nu$, представляем в форме

$$t_i = c_i + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{i,k}}{f'_i(c_i, x_k)} = U_{i,s+1} + R_{i,s+1};\quad R_{i,s+1} = \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{z_{i,k}}{f'_i(c_i, x_k)}. \tag{5}$$

Из неравенств (4) следует, прежде всего, что $c_i \leqslant t_i \leqslant d_i$.

Далее, из неравенств (2) и условий нашей теоремы мы непосредственно получаем неравенства

$$0 \leqslant R_{i,s+1} < \varepsilon \frac{\varphi(x_s)}{f'_i(b_i, x_s)},\quad s = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

В силу существования непрерывных производных у функций $f_i(t_i, x_k)$ мы получим, по теореме о среднем, что

$$f_i(U_{i,s+1} + R_{i,s+1}, x_s) = f_i(U_{i,s+1}, x_s) + R_{i,s+1} f'_i(\lambda_i, x_s), \tag{7}$$

где $c_i \leqslant \lambda_i \leqslant d_i$. Далее, мы будем иметь, в силу неравенств (6) и условий теоремы, что

$$R_{i,s+1} f'_i(\lambda_i, x_s) < \varepsilon\varphi(x_s). \tag{8}$$

Выберем теперь величину $z_{i,s}$, считая, что $z_{i,1}, z_{i,2}, \ldots, z_{i,s-1}$ уже выбраны, так, чтобы выполнялось соотношение

$$f_i(U_{i,s+1}, x_s) = \gamma_{i,s},\quad z_{i,s} = \delta_{i,s},\quad 0 \leqslant \delta_{i,s} \leqslant 1. \tag{9}$$

Действительно, $U_{i,s+1} = U_{i,s} + \dfrac{z_{i,s}}{f'_i(c_i, x_s)}$, где $U_{i,s}$ зависит только от переменных $z_{i,1}, \ldots, z_{i,s-1}$ и не меняется с изменением $z_{i,s}$.

Далее, мы будем иметь, в силу условий теоремы, что

$$f_i(U_{i,s+1}, x_s) - f_i(U_{i,s}, x_s) = z_{i,s} \frac{f'_i(\lambda_i, x_s)}{f'_i(c_i, x_s)} \geqslant z_{i,s}, \tag{10}$$

так как $c_i \leqslant \lambda_i \leqslant d_i$.

Значит, $f_i(t_i, x_s)$ при изменении $z_{i,s}$ от нуля до единицы возрастает на величину не меньшую, чем единица. Отсюда следует, что $\{f_i(t_i, x_s)\}$, так как $f_i(t_i, x_s)$ непрерывна, принимает все значения между нулем и единицей. Значит, число $\delta_{i,s}$ может быть найдено.

Определив этим путем все $z_{i,s}$ и полагая

$$\alpha_i = c_i + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\delta_{i,s}}{f_i'(c_i, x_s)}, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{11}$$

мы видим, что числа α_i в силу неравенств (8) и соотношений (9) удовлетворяют условиям нашей теоремы.

Возьмем функцию $xt^{1/x}$, $1/2 \leqslant t \leqslant 3/4$. Эта функция удовлетворяет, как легко видеть, всем условиям нашей теоремы, кроме третьего. Далее, $xt^{1/x} = x + \ln t + O(1/x)$. Значит, для этой функции наша теорема не верна. Отсюда следует, что условие (3) существенно. Условие (2) может быть несколько расширено. Заметим, как это видно из доказательства теоремы, что выбор последовательности $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n, \ldots$ не зависит от выбранной последовательности M, точки которой не выходят за пределы ν-мерного единичного куба. Пусть M_1 будет последовательность с первым элементом τ_0, а за первым членом пусть идут подряд все элементы последовательности M. Выбрав по (2) последовательность, $\{x_n\}$ независимо от последовательности M_1 и заставляя τ_0 пробегать все точки ν-мерного единичного куба, мы каждой точке τ_0 сопоставим свою точку η ν-мерного кубика со стороной ε с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, причем при различных τ_0 точки η будут также различны. Отсюда следует, что мощность множества точек (φ, M) всюду плотности дробных долей функций $f_i(t_i, x)$ во всяком сколь угодно малом кубике континуум.

Из доказательства теоремы, в частности, следует, что будут существовать в любом интервале точки (φ, M) всюду плотности дробных долей для функций $x^s \alpha$, $(1+\alpha)^x$, $e^{(\alpha+1)^x}$, $s > 0$, $\alpha > 0$, при x, пробегающем натуральный ряд.

Теорема 2. *Пусть ν функций $f_i(t_i, y)$, $i = 1, \ldots, \nu$, удовлетворяют условиям* (1) *и* (2) *нашей теоремы* 1, *а условие* (3) *будет дополнено более сильным условием, именно:*

$$\lim_{k=\infty} \frac{f_i'(a_i, y_{k+1})}{f_i'(b_i, y_k)} \varphi(y_k) = \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{12}$$

Пусть также M будет произвольной бесконечной последовательностью точек τ_k ν-мерного единичного куба, состоящей, может быть, только из конечного числа различных точек. Тогда на любых сегментах $[c_i, d_i]$, внутренних по отношению к $[a_i, b_i]$, найдутся точки α_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, такие, что

$$\lim\, [\{f_i(\alpha_i, y_k)\} - \beta_{i,k}] \frac{1}{\varphi(y_k)} = 0, \tag{13}$$

причем y_k пробегает все элементы последовательности L.

В этой теореме $\varphi(t)$ есть любая монотонно не возрастающая функция $1 \geqslant \varphi(t)$ и, в частности, возможно, что $\varphi(t) = 1$. Точки τ_k имеют координаты $\beta_{i,k}, \beta_{2,k}, \ldots, \beta_{\nu,k}$.

Теорема есть почти прямое следствие теоремы 1. Действительно, так как выбор последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в теореме 1 не зависит от последовательности M', мы можем взять в качестве последовательности M' последовательность M теоремы 2. Далее, в силу условий (12) будут выполнены неравенства (2) при $\varepsilon > 0$ и $k > k_0(\varepsilon)$ уже для последовательности y_k и функции $\varphi_1(t)$, выбранной так, чтобы условия (12) при замене $\varphi(t)$ на $\varphi_1(t)$ выполнялись и $\lim\limits_{t=\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi(t)} = 0$. Мы получим тогда, на основании так измененной теоремы 1, что существуют на сегментах $[c_i, d_i]$ точки α_i, для которых справедливы неравенства, дающие теорему 2:

$$0 \leqslant \{f_i(\alpha_i, y_k)\} - \beta_{i,k} < \varphi_1(y_k), \ i = 1, 2, \ \ldots, \ \nu, \ k > k_0. \tag{14}$$

Очевидно, что функции $n!\alpha$, $(\alpha+1)^{n!}$, t^{2^n}, $\alpha > 0$, $2 \leqslant t \leqslant 3$, удовлетворяют условиям теоремы 2 при $\varphi(t) = 1$.

В теореме 2, как нетрудно видеть, содержится основа различных теорем о непродолжаемости как степенных рядов, так и рядов Дирихле за круг или абсциссу сходимости в случае нулевой в известном смысле плотности их показателей. Докажем, например, теорему Фабри о непродолжаемости ряда

$$f(z) = \sum_0^\infty a_{n_k} z^{n_k}; \quad \overline{\lim_{k=\infty}} \, | a_{n_k} |^{1/n_k} = 1; \quad \lim_{k=\infty} \frac{n_k}{k} = \infty \tag{15}$$

за единичный круг.

Выберем из последовательности чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ бесконечную подпоследовательность $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ так, чтобы существовал предел $\lim\limits_{k=\infty} | a_{m_k} |^{1/m_k} = 1$. Из этой бесконечной подпоследовательности выберем другую бесконечную подпоследовательность, для всех элементов которой будут верны неравенства $s_{k+1} > 3^{s_k} s_k$, $k \geqslant 1$.

Построим теперь целую функцию $g(x) = \prod\limits_{n_k \neq s_i}^{\infty} (1 - n^{-2} x^2)$, которая при выполнении условия (15) будет минимального типа порядка 1. Тогда функция

$$f_1(z) = \sum_1^\infty b_{s_k} z^{s_k} = \sum_1^\infty g(n_k)\, a_{n_k} z^{n_k} \tag{16}$$

будет иметь на круге сходимости особенности только в тех точках, которые будут особыми для $f(z)$. Функция $f_1(z)$ обязана иметь на круге сходимости хотя бы одну особую точку. Пусть эта точка будет $e^{2\pi i \gamma}$. Тогда, по теореме 2, при $y_k = s_k$, $f(t, y) = s_k t$, $\varphi(s_k) = 2^{-s_k}$, $\nu = 1$, условия которой при этом будут выполнены, мы будем иметь, что на каждом интервале $0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon < 1$ будет существовать такое $t = \alpha$, для которого будут выполняться неравенства

$$0 \leqslant \{s_k \alpha\} - \{s_k \gamma\} < 2^{-s_k}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Отсюда следует, что

$$f_1(z) = \sum_1^\infty e^{2\pi i (\gamma - \alpha)} b_{s_k} z^{s_k} + \sum_1^\infty O(2^{-s_k})\, b_{s_k} z^{s_k}, \tag{18}$$

или $f_1(z) = f_1(e^{2\pi i (\gamma - \alpha)} z) + f_2(z)$, где $f_2(z)$ регулярна в круге $|z| < 2$. Значит, точка $e^{2\pi i \alpha}$ будет особой точкой $f_1(z)$. Но эти точки лежат всюду плотно на окружности и, значит, $f_1(z)$, а следовательно, и $f(z)$ не продолжаемы за круг сходимости.

Поступило
10 XII 1948