Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и А. М. ЯГЛОМ

О РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЯХ, КОТОРЫМ СООТВЕТСТВУЮТ ДЕФИНИТНЫЙ ЗАРЯД И ДЕФИНИТНАЯ ЭНЕРГИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 X 1948)

1. Теорема Паули для общих релятивистски инвариантных уравнений. В 1940 г. В. Паули ([1]) установил, что в теории c-чисел волновым полям, описывающим частицы с целым спином, не может соответствовать дефинитный заряд, а полям, описывающим частицы с полуцелым спином, не может соответствовать дефинитная энергия. Доказательство этой теоремы (относящееся к числу наиболее существенных общих предложений теории элементарных частиц) опирается на предположение о том, что рассматриваемые волновые поля описываются волновой функцией ψ, имеющей конечное число компонент и удовлетворяющей некоторому релятивистски инвариантному уравнению.

В последнее время неоднократно рассматривались волновые поля, описываемые функцией ψ, имеющей бесконечное число компонент (см., например, ([2–6])); при этом, в частности, было выяснено, что для таких полей теорема Паули может и не иметь места ([4, 6]). Мы здесь сформулируем результаты, выясняющие вопрос о том, когда могут и когда не могут быть дефинитными заряд и энергия (в частности, когда заряд и энергия могут быть одновременно дефинитными) также и для бесконечномерных инвариантных уравнений.

Мы будем предполагать, что волновая функция ψ имеет конечное или бесконечное число компонент и удовлетворяет релятивистски инвариантному уравнению первого порядка

$$\sum_{k=0}^{3} L^k \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + i\varkappa\psi = 0, \tag{1}$$

где L^k — матрицы, действующие на ψ, а $\varkappa$ — вещественная постоянная (напомним, что уравнения высших порядков всегда могут быть представлены в виде уравнения первого порядка относительно новой волновой функции, имеющей большее число компонент). При преобразованиях собственной группы Лоренца величины ψ линейно преобразуются по некоторому представлению D этой группы. Как и в ([5, 6]), мы будем предполагать D разложенным на неприводимые представления D_τ этой группы. Этому разложению представления D отвечает распадение величины ψ на неприводимые величины ψ_τ, где ψ_τ есть совокупность компонент ψ, преобразующаяся по неприводимому представлению D_τ. Напомним, что каждое неприводимое представление D_τ характеризуется парой чисел (k_0, k_1) (далее мы будем это записывать знаком $\tau \sim (k_0, k_1)$), где k_0 — целое или полуцелое *, а k_1—комплексное, причем пара эта определена с точностью до перемены знаков у обоих ее элементов. В частности, конечномерным представлениям отвечают k_0 и k_1 одновременно целые или полуцелые и $|k_1| > |k_0|$ ([5], [6]).

Из результатов ([5], [6]) легко следует, что для нераспадающегося уравнения, для которого существуют заряд и энергия, в разложении D, наряду с D_τ, где $\tau \sim (k_0, k_1)$, могут встречаться еще только такие $D_{\tau'}$, для которых $\tau' \sim (k_0 + m, k_1 + n)$ или $\tau' \sim (k_0 + m, -k_1^* + n)$ (k_1^*—комплексно-сопряжено с k_1, m и n — целые числа, положительные, отрицательные или равные нулю). Аналогом теоремы Паули для общих нераспадающихся релятивистски инвариантных уравнений являются следующие предложения.

A) Если для пар (k_0, k_1), встречающихся при разложении D на неприводимые представления, $k_1 = k_1' + ik_1''$ — комплексные числа, для которых $k_1'' \neq 0$, а k_1' не есть целое или полуцелое, то ни плотность заряда (и полный заряд), ни плотность энергии (и полная энергия) не могут быть дефинитными.

B) Если для пар (k_0, k_1) $k_1 = k_1' + ik_1''$ — комплексные числа, для которых $k_1'' \neq 0$, а k_1' — целые, то не может быть дефинитна плотность заряда (и полный заряд); если же для $k_1 = k_1' + ik_1''$, $k_1'' \neq 0$, а k_1' — полуцелые, то не может быть дефинитна плотность энергии (и полная энергия).

C) Если для пар (k_0, k_1) k_1 — вещественные не целые и не полуцелые числа, то при k_0 целых не может быть дефинитна плотность заряда (и полный заряд), а при k_0 полуцелых не может быть дефинитна плотность энергии (и полная энергия).

D) Если для пар (k_0, k_1) k_0 и k_1 одновременно являются целыми числами, то не может быть дефинитна плотность заряда (и полный заряд); если же k_0 и k_1 одновременно являются полуцелыми числами, то не может быть дефинитна плотность энергии (и полная энергия).

Напомним, что спин частицы, отвечающей волновому полю ψ, будет целым или полуцелым одновременно с числом k_0. Таким образом, в случаях C) и D) имеет место обычная связь дефинитности заряда и энергии со спином; в частности, случай D) содержит также и обычную теорему Паули для конечномерных уравнений. В случае же B) дефинитность заряда и энергии никак не связана со значениями спина.

Нетрудно построить примеры, показывающие, что в случаях B)—D) энергия может быть дефинитна при целых k_1' или, соответственно, k_0, а заряд может быть дефинитен при полуцелых k_1' или, соответственно, k_0 ([4], [6]). При этом в случае B) теорема Паули в обычной ее формулировке может и нарушаться.

Помимо случаев A) — D) остается еще только одна возможность:

E) Для пар (k_0, k_1) одно из чисел k_0, k_1 — целое, а второе — полуцелое.

В этом случае (и только в этом) никакого аналога теоремы Паули не существует, и уравнениям могут соответствовать одновременно и дефинитная энергия и дефинитный заряд. Уравнения с такими свойствами могут быть использованы для описания частиц, имеющих

* Обозначения здесь совпадают с принятыми в ([6]). В предварительном сообщении ([5]) мы обозначали k_0 и k_1 через $k_0/2$ и $k_1/2$, в связи с чем k_0 там всегда было целым.

заряд лишь одного знака; в случаях же A)—D) уравнения обязательно описывают частицы, имеющие заряд обоих знаков.

2. Примеры уравнений, которым отвечают дефинитный заряд и дефинитная энергия. Простейшими релятивистски инвариантными уравнениями с такими свойствами являются два уравнения, для которых функция ψ преобразуется по неприводимому представлению собственной (и полной) группы Лоренца, определяемому парой $(0, {}^1/_2)$ или, соответственно, $({}^1/_2, 0)$*. Согласно результатам ([5], [6]), эти уравнения являются единственными, для которых ψ преобразуется по неприводимому представлению собственной группы Лоренца. Функция ψ для этих уравнений имеет компоненты ψ^j_m **, где j для первого из уравнений принимает значения $0, 1, 2, \ldots$, а для второго — значения ${}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots$, а m для каждого j принимает $2j+1$ значений — $j, -j+1, \ldots, j$. Сами уравнения в обоих случаях выписываются одинаково: матрица L^0 для них имеет вид

$$L^0 = \left\| \left(j + \frac{1}{2}\right) \delta_{j'j} \delta_{m'm} \right\|, \tag{2}$$

а L^k $(k = 1, 2, 3)$ определяются по формуле

$$L^k = [L^0, I^{0k}] \qquad (k = 1, 2, 3),$$

где I^{0k} — инфинитезимальные преобразования соответствующего представления. Плотность заряда ρ и плотность энергии W определяются по формуле

$$\rho = \varepsilon (L^0 \psi, \psi), \qquad W = -\frac{1}{2i} \left\{ \left(L^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0}, \psi \right) - \left(\psi, L^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right) \right\} \tag{3}$$

(мы принимаем здесь систему единиц, в которой $\hbar = 1$ и $c = 1$), где

$$(\psi, \psi) = \sum_{j, m} \psi^{j*}_m \psi^j_m = \sum_{j, m} | \psi^j_m |^2. \tag{4}$$

Выпишем здесь еще, как выражаются полный заряд e и полная энергия E для этих уравнений через амплитуды разложения волновой функции ψ в ряд Фурье (переход в импульсное пространство); получаемые при этом формулы ясно показывают дефинитный характер этих величин. ψ, как обычно, мы будем предполагать периодичным по трем пространственным координатам с общим периодом L. Разложение произвольного решения ψ наших уравнений в ряд Фурье в таком случае будет иметь вид

$$\psi(\mathbf{x}, x^0) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{j, m} \sqrt{\frac{1}{j + {}^1/_2}}\, \Psi^j_m(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kx} - k_0^{(j)} x^0)}, \tag{5}$$

где

$$k_0^{(j)} = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{\varkappa^2}{(j + {}^1/_2)^2}} = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^{(j)\,2}} \tag{6}$$

$\left(m^{(j)} = \frac{\varkappa}{j + {}^1/_2} \text{ есть масса покоя, отвечающая спину } j \right)$. В этой сумме импульс $\mathbf{k}$ пробегает все трехмерные векторы, имеющие компоненты,

* Эти уравнения были указаны в ([6]) в качестве простейших примеров релятивистски инвариантных уравнений.

** В ([5], [6]) вместо j, m мы употребляли буквы k, p.

кратные $\frac{2\pi}{L}$; индекс j нумерует решения, отличающиеся значением спина, а индекс m — решения, отличающиеся величиной проекции спина на ось Ox^1. Для e и E при этом получаются следующие выражения:

$$e = \varepsilon \sum_{\mathbf{k}} \sum_{j,m} \Psi_m^{j*}(\mathbf{k}) \Psi_m^j(\mathbf{k}), \tag{7}$$

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{j,m} k_0^{(j)} \Psi_m^{j*}(\mathbf{k}) \Psi_m^j(\mathbf{k}). \tag{8}$$

Поступило
27 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Pauli, Phys. Rev., 58, 716 (1940); В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, М., 1947. [2] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., A, 183, 284 (1945). [3] В. Л. Гинзбург и И. Е. Тамм, ЖЭТФ, 17, 227 (1947). [4] Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc., A, 189, 372 (1947). [5] И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, ДАН, 59, 655 (1948). [6] И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, ЖЭТФ, 18, 703 (1948).