Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. С. ПАРАСЮК

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С НЕБИГАРМОНИЧЕСКИМ ПЛАСТИЧЕСКИМ СОСТОЯНИЕМ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 X 1948)

Пусть бесконечная плоскость с круговым отверстием радиуса R, к контуру которого приложены внешние усилия

$$\sigma_\rho \big|_{\rho=R} = a, \qquad \tau_{\rho\vartheta} \big|_{\rho=R} = b, \tag{1}$$

растягивается на бесконечности вдоль осей x и y усилиями

$$\sigma_{x\infty} = C, \quad \sigma_{y\infty} = D, \quad D \geqslant C. \tag{2}$$

Рассматриваем случай плоской деформации. Допустим, что усилия приложены к контуру отверстия и на бесконечности таковы, что вокруг рассматриваемого кругового отверстия возникает пластическая зона.

Эта упруго-пластическая задача для случая, когда $C=D=0$, решена С. Г. Михлиным (2) и для случая, когда $C \neq D \neq 0$, но $\tau_{\rho\vartheta} \big|_{\rho=R} = b = 0$, Л. А. Галиным (1).

В случае Л. А. Галина (1) функция

$$U = k\rho^2 \lg \frac{\rho}{R} - \frac{k-a}{2} \rho^2, \tag{3}$$

удовлетворяющая уравнению Сен-Венана

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 4k^2 \tag{4}$$

и контурным условиям

$$\sigma_\rho \big|_{\rho=R} = a, \quad \tau_{\rho\vartheta} \big|_{\rho=R} = 0, \tag{5}$$

является бигармонической.

Когда же $\tau_{\rho\vartheta} \big|_{\rho=R} = b \neq 0$, то функция напряжений в пластической зоне не будет бигармонической, и метод Л. А. Галина (1) неприменим.

Будем обозначать индексом „1“ величины, относящиеся к пластической области, граница которой, по предположению, должна охватывать круговое отверстие радиуса R, а индексом „2“ — все величины, относящиеся к упругой области.

В нашем случае напряжения в пластической области определяются формулами Михлина ([2]):

$$\sigma_\rho = \varepsilon k\left[2\lg\left(\sqrt{\rho^2 - A} + \sqrt{\rho^2 + A}\right) - \frac{\sqrt{\rho^4 - A^2}}{\rho^2}\right] + Bk,$$

$$\sigma_\theta = \varepsilon k\left[2\lg\left(\sqrt{\rho^2 - A} + \sqrt{\rho^2 + A}\right) + \frac{\sqrt{\rho^4 - A^2}}{\rho^2}\right] + Bk,$$

$$\tau_{\rho\vartheta} = Ak/\rho^2, \tag{6}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, k — положительная константа, $A = \frac{bR^2}{k}$; $B = \frac{a}{k} - \varepsilon\left[2\lg\left(\sqrt{R^2 + A} + \sqrt{R^2 - A}\right) - \frac{\sqrt{R^4 - A^2}}{R^2}\right]$, ρ, ϑ — полярные координаты, начало которых в центре отверстия.

Задача сводится к определению контура L, охватывающего круговое отверстие радиуса R, и двух голоморфных вне этого контура функций $\Phi_2^*(z)$ и $\Psi_2^*(z)$ по таким условиям:

$$4\operatorname{Re}\Phi_2^*(z) = \begin{cases} 2\varepsilon k\left[2\lg\left(\sqrt{\rho^2 - A} + \sqrt{\rho^2 + A}\right)\right] + 2Bk & \text{на } L, \\ C + D & \text{при } z \to \infty; \end{cases} \tag{7}$$

$$2\left[\bar{z}\,\Phi_2^{*\prime}(z) + \Psi_2^*(z)\right] = \begin{cases} 2k\left[\frac{\varepsilon\sqrt{\rho^4 - A^2}}{\rho^2} + \frac{Ai}{\rho^2}\right]e^{-2i\theta} & \text{на } L, \\ D - C & \text{при } z \to \infty. \end{cases} \tag{8}$$

Допуская возможность отображения внешности контура L плоскости z на внешность единичного круга γ плоскости ζ функцией

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n} \tag{9}$$

и полагая $\Phi_2^*(\omega(\zeta)) = \Phi_2(\zeta)$ и $\Psi_2^*(\omega(\zeta)) = \Psi_2(\zeta)$, из (7), (8) получим

$$4\operatorname{Re}\Phi_2(\zeta) =$$

$$= \begin{cases} 2\varepsilon k\left[2\lg\left(\sqrt{\omega(\zeta)\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - A} + \sqrt{\omega(\zeta)\bar{\omega}(\bar{\zeta}) + A}\right)\right] + 2Bk & \text{на } \gamma, \\ C + D & \text{при } z \to \infty; \end{cases} \tag{10}$$

$$2\left[\frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)}\Phi_2'(\zeta) + \Psi_2(\zeta)\right] =$$

$$= \begin{cases} 2k\left[\frac{\varepsilon\sqrt{[\omega(\zeta)\bar{\omega}(\bar{\zeta})]^2 - A^2} + Ai}{\omega(\zeta)\bar{\omega}(\bar{\zeta})}\right]\frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega(\zeta)} & \text{на } \gamma, \\ D - C & \text{при } z \to \infty. \end{cases} \tag{11}$$

Функции $\Phi_2(\zeta)$ и $\Psi_2(\zeta)$ будем искать в виде

$$\Phi_2(\zeta) = a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{a_n}{\zeta^n} + \cdots \tag{12}$$

$$\Psi_2(\zeta) = b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{b_n}{\zeta^n} + \cdots \tag{13}$$

Учитывая, что на γ $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$, умножим первое из (11) на $\frac{1}{\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$, где ζ — точка внутри γ, и проинтегрируем по γ; получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\frac{\bar{\omega}(1/\sigma)}{\omega'(\sigma)} \Phi_2'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\Psi_2(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\frac{\varepsilon k \sqrt{\left[\omega(\rho)\, \bar{\omega}(1/\sigma)\right] - A^2} + Ai}{\omega(\sigma)\, \bar{\omega}(1/\sigma)} \frac{\bar{\omega}(1/\sigma)}{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma. \tag{14}$$

На основании теоремы Харнака ([3]) условие (11) эквивалентно условию (14). Задача будет решена, если определим из (14) функцию $z = \omega(\zeta)$ (9). Заметим, что выражение под интегралом в первой части (14) на бесконечности ведет себя как

$$k\varepsilon \frac{\omega(1/\sigma)}{\omega(\sigma)}. \tag{15}$$

Если теперь возьмем $\omega(\sigma)$ в виде

$$z = c\sigma + \frac{c_1}{\sigma} + \frac{c_2}{\sigma^2},$$

то условие (14), на основании (15), (12), (13) и второго условия (11), перейдет в следующее:

$$\frac{c_2}{c} a_1 + \frac{D - C}{2} = \varepsilon k \left[\frac{\bar{c}_2}{c} \zeta + \frac{\bar{c}_1}{c}\right]; \tag{16}$$

откуда получаем: $\bar{c}_2 = 0$, $\bar{c}_1 = c_1 = \frac{D - C}{2k} c = \beta c$, $\varepsilon = \pm 1$, где положено $\beta = \frac{D - C}{2k}$.

Следовательно,

$$z = \omega(\zeta) = c\left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta}\right). \tag{17}$$

Остается определить константу c так, чтобы удовлетворить второму условию (10). Легко видеть, что при достаточно малом A это всегда можно сделать.

При $A = 0$ мы получаем решение Л. А. Галина (1).

Отметим, что этот метод может быть применен для многих упруго-пластических задач в случае, когда напряжения в пластической зоне заданы в явном виде.

В заключение выражаю благодарность проф. Г. Н. Савину за внимание и помощь, оказанную мне при выполнении настоящей работы.

Львовский отдел Института математики
Академии наук УССР

Поступило
28 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Галин, Прикладн матем. и мех., 10, № 3 (1946). [2] С. Г. Михлин, Основные уравнения математической теории пластичности, изд. АН СССР, 1934. [3] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1935.