Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 4

*МАТЕМАТИКА*

В. А. ЯКУБОВИЧ

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 X 1948)*

Исследуется асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = Ax + f(t; x) \tag{1}$$

сравнением с решением системы

$$dy/dt = Ay \tag{2}$$

($A$ — постоянная матрица порядка $n$; $x$, $y$ и $f$ — $n$-мерные векторы).

Цель работы — получение достаточных условий, при которых

$$|x(t) - y(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Решение системы (2), обращающееся в $y_0$ при $t = t_0$, есть

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0.$$

Пусть $\lambda_i$ — собственные значения и $m_i$ — размер соответствующего ящика канонической формы матрицы $A$.

Введем обозначения: $\lambda = \max \operatorname{Re} \lambda_i$ по всем $\lambda_i$; $m = \max m_i$ по тем $i$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_i = \lambda$; $p = \max m_i$ по тем $i$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$; $p = 1$, если нет $\lambda_i$ с $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$; $\lambda^* = \max \operatorname{Re} \lambda_i$ по тем $i$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$; $\lambda^* < 0$; $m^* = \max m_i$ по тем $i$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_i = \lambda^*$.

Очевидно, верна следующая оценка:

$$|e^{At}| \leqslant Ce^{\lambda t} t^{m-1} \text{ при } t \geqslant 1; \quad |e^{At}| \leqslant Ce^{\lambda t} \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1\,*. \tag{3}$$

Относительно функции $f(t; x)$ в (1) будем предполагать, что

$$|f(t; x)| \leqslant g(t)|x|, \tag{4}$$

где $g(t)$ — непрерывная функция.

Существование и единственность решения системы (1) на $(t_0, \infty)$ при этом предположении доказаны A. Wintner'ом ([1]).

Легко убедиться, что система (1) равносильна интегральному уравнению

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} f(\tau; x(\tau))\, d\tau, \quad x_0 = x(t_0). \tag{5}$$

---

* Всюду в дальнейшем под модулем матрицы $A = \|a_{ik}\|$ понимается $|A| = \sqrt{\sum_{ik} |a_{ik}|^2}$. Тогда легко доказать, что $|A+B| \leqslant |A| + |B|$; $|AB| \leqslant |A| \cdot |B|$. Вектор $x$ — матрица с одним столбцом.

Теорема 1. (О порядке роста решений $x(t)$).

$$\frac{|x(t)|}{t^{m-1}e^{\lambda t}}=O\left(e^{C\int\limits_{t_0}^{t}t^{m-1}g(t)\,dt}\right)\qquad при\quad t\geqslant t_0\geqslant 1 \tag{6}$$

*($C$ — константа в формуле (3) и определяется только матрицей $A$).*

Эта теорема очень просто доказывается на основании (5) и (3).

Следствие 1 ([2]). Дана линейная система $dx/dt=G(t)x$; $G(t)=\|g_{ik}(t)\|$; $g_{ik}(t)=O(t^{\mu})$, $\mu$ действительно. Данная система — частный случай (1) с $A=\|0\|$ $(m=1,\ p=1,\ \lambda=0)$ и $f(t;x)=G(t)x$. Очевидно, что (4) выполнено: $|f(t;x)|\leqslant g(t)|x|$, где $g(t)=|G(t)|=O(t^{\mu})\leqslant C't^{\mu}$.

Теорема 1 дает:

$$|x|=O\left(e^{C\int\limits_{0}^{t}t^{\mu}dt}\right)=\begin{cases}O\left(e^{C't^{\mu+1}}\right), & \mu\neq-1,\\ O(t^{C}), & \mu=-1.\end{cases}$$

Таким образом, при $-\infty<\mu<-1$ все решения $x(t)$ ограничены (из дальнейшего будет следовать, что они стремятся к конечному пределу).

Следствие 2. Предположим, что все решения (2) стремятся к нулю при $t\to\infty$ (т. е. $\lambda=\lambda^*<0$, $m=m^*$) и, кроме того, $m=1$.

Из (6): $|x(t)|=O\left(e^{\lambda t+C\int\limits_{t_0}^{t}g(t)\,dt}\right)$.

Если $\lambda t+C\int\limits_{t_0}^{t}g(t)\,dt\to-\infty$, то все решения (1) стремятся к нулю.

Это будет заведомо выполнено, если сходится $\int\limits_{t_0}^{\infty}g(t)\,dt$. Сходимость этого интеграла есть то условие, которое получается для данного частного случая по теореме Вейля ([3]).

В двух дальнейших теоремах будем предполагать, что не все решения (2) стремятся к нулю, т. е. $\lambda\geqslant 0$.

Теорема 2. (Достаточные условия для того, чтобы $|x-y|\to 0$). *Даны системы* (1), (2) *и выполнено* (4).

I. *Если сходится интеграл*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}t^{m+p-2}e^{\lambda t}g(t)\,dt, \tag{7}$$

*то каждому решению* (1) $x(t)$ *можно поставить в соответствие решение* (2) $y(t)$ *такое, что* $|x(t)-y(t)|\to 0$ *при* $t\to\infty$.

II. *Если, кроме того,* $f(t;x)$ *удовлетворяет условию*

$$|f(t;x_1)-f(t;x_2)|\leqslant g(t)|x_1-x_2| \tag{4a}$$

*и сходится интеграл* (7), *то между всеми решениями* (1) *и* (2) *можно установить взаимно-однозначное соответствие такое, что* $|x(t)-y(t)|\to 0$ *при* $t\to\infty$.

*При этом верна оценка:*

$$|x(t)-y(t)|=O\left(\int\limits_{t}^{\infty}t^{m+p-2}e^{\lambda t}g(t)\,dt\right)+O\left(\int\limits_{t/2}^{t}t^{m-1}e^{\lambda t}g(t)\,dt\right)+$$
$$+O\left(e^{\frac{\lambda^*}{2}t}t^{m^*-1}\right). \tag{8}$$

*и если нет $\lambda_i$ с $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то два последних слагаемых нужно опустить.*

Если все решения (2) ограничены (т. е. $\lambda = 0$, $m = p = 1$), то утверждение I есть теорема Вейля ([3]).

Теорему 2 нельзя улучшить (не вводя дополнительных ограничений на систему (1)). Именно, существуют системы (1), удовлетворяющие (7), где из того факта, что для некоторого решения $x(t)$ найдется $y(t)$ и $|x(t) - y(t)| \to 0$, следует, что сходится (7).

За такую систему можно взять (1), где

$$A = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} \lambda & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \lambda & & & & \\ \hline & & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 0 \end{array} \right\|, \quad f(t;\, x) = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \varphi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\|, \quad \varphi = g(t)\,|x|, \quad \lambda > 0$$

(на пустых местах стоят нули).

Т е о р е м а 3. (Об ограниченных решениях). *Даны системы* (1), (2) *и выполнено* (4).

I. *Если сходится интеграл*

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{p-1} g(t)\, dt, \tag{9}$$

*то каждому ограниченному решению* (1) $x(t)$ *можно поставить в соответствие решение* (2) $y(t)$ *(ограниченное) такое, что* $|x(t) - y(t)| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

II. *Если, кроме того,* $f(t;\, x)$ *удовлетворяет условию* (4a) *и сходится интеграл* (9), *то между всеми ограниченными решениями* (1) *и* (2) *можно установить взаимно-однозначное соответствие такое, что* $|x(t) - y(t)| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

*При этом верна оценка*

$$|x(t) - y(t)| = O\left(\int_t^{\infty} t^{p-1} g(t)\, dt\right) + O\left(\int_{t/2}^{t} g(t)\, dt\right) + O\left(e^{\frac{\lambda^*}{2} t}\, t^{m^*-1}\right), \tag{10}$$

*и если нет $\lambda_i$ с $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то два последних слагаемых нужно опустить.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Можно доказать, что II нельзя улучшить. Именно, для систем (1), (2), где

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \quad 0 \end{array} \right\|, \quad f(t;\, x) = (\varphi, 0, \ldots, 0), \quad \varphi = g(t)\,|x|$$

(на пустых местах стоят нули), из того факта, что $|x(t) - y(t)| \to 0$, где $y(t)$ — любое ограниченное решение с $y_{p+1} = \text{const} \neq 0$, следует, что сходится $\int_0^{\infty} t^{p-1} g(t)\, dt$.

Случай, когда все решения системы (2) стремятся к нулю, был исключен в теоремах 2 и 3. Однако он просто сводится к предыдущему. Именно, дополняя обе системы уравнениями

$$dx_{n+1}/dt = x_{n+2}, \qquad dy_{n+1}/dt = y_{n+2},$$
$$dx_{n+2}/dt = -x_{n+1}, \qquad dy_{n+2}/dt = -y_{n+1},$$

получим, что для дополненной системы $\lambda=0$, $m=p=1$. Очевидно, если для новых систем $|x(t)-y(t)|\to 0$, то же будет и для старых. Таким образом, получаем:

Теорема 2а. *Даны системы* (1), (2) *и выполнено* (4). *Дано, что все решения системы* (2) *стремятся к нулю. Тогда, если сходится* $\int\limits_{t_0}^{\infty} g(t)\,dt$, *то все решения* (1) *также стремятся к нулю.*

Эта теорема совпадает с теоремой Вейля для данного случая. Эта теорема не окончательна, ее можно улучшить. Для случая $m^*=1$ такое улучшение дано в следствии 2 к теореме 1.

Распространение предыдущих теорем на неоднородный случай. Даны системы (1), (2). $f(t; x)$ удовлетворяет либо условию (4а), либо

$$|f(t;\, x) - f(t;\, 0)| \leqslant g(t)\,|x| \tag{4б}$$

(условие (4б) вместо прежнего условия (4)).

Дополним систему (1) следующим образом: $dx/dt = Ax + f(t; x) - f(t; 0) + f(t; 0)\,x_{n+1}$, $dx_{n+1}/dt = 0$, $x_{n+1}(t_0)=1$ или для $(n+1)$-мерного вектора $x'$ $dx'/dt = A'x' + f'(t; x')$.

Легко видеть, что если выполнено (4б) для $f$, то для $f'$ будет выполнено (4), и если для $f$ выполнено (4а), то (4а) будет выполнено и для $f'$ с функцией $g'(t) = \sqrt{2}\,(g(t) + |f(t; 0)|)$.

Таким образом, теоремы 1, 2, 3 можно применять и для неоднородного случая, только вместо $g(t)$ нужно брать $\sqrt{2}\,(g(t) + |f(t; 0)|)$. Если все решения (2) — чистые синусоиды ($\lambda=0$, $m=p=1$), то I теоремы 2 есть теорема Wintner'a [2].

Распространение предыдущих теорем на случай, когда $A$ — переменная периодическая матрица. Даны системы (1), (2). $f(t; x)$ удовлетворяет либо (4а), либо (4б).

Рассмотрим случай, когда система (2) приводима. Это означает, что ее фундаментальная система имеет вид: $Y(t) = P(t)\,e^{Bt}$, где $P(t)$ — матрица дифференцируемых функций; $B$ — постоянная матрица; $|P(t)| \leqslant \text{const}$, $|P^{-1}(t)| \leqslant \text{const}$ для $t \geqslant t_0$.

Предыдущие теоремы сравнения можно применять, зная матрицу $B$ ($\lambda$, $m$, $p$ и т. д. берутся у матрицы $B$). Действительно, замена $x = P(t)\,x'$, $y = P(t)\,y'$ приведет к уравнениям $dy'/dt = By'$, $dx'/dt = Bx' + f'(t; x')$, $f'(t; x') = P^{-1}(t)\,f\,[t; P(t)\,x']$. $f'$ и $f$ удовлетворяют условиям (4а) и (4б) одновременно, и к полученным системам можно применять теоремы сравнения. Если же $|x'-y'|\to 0$, то и $|x-y|\to 0$ при $t\to\infty$.

Поступило
20 IX 1948

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Wintner, Am. J. Math., 68, No. 3 (1946). [2] A. Wintner, ibid., 67, 417 (1945). [3] H. Weyl, ibid., 68, 7 (1946). [4] A. Wintner, ibid., 68, No. 1 (1946).