Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. А. ШРЕЙДЕР

СТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ В КОЛЬЦАХ ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ МЕР

(Представлено академиком И. Г. Петровским 8 X 1948)

Максимальные идеалы в нормированном кольце $V^{(b)}$, состоящем из функций ограниченной вариации на прямой с умножением (сверткой), определенным по формуле

$$\varphi * \psi(t) = \int \varphi(t-s)\psi(ds), \tag{1}$$

впервые изучались И. М. Гельфандом [1].

Впоследствии значительный класс максимальных идеалов кольца был описан Д. А. Райковым [2].

В этой заметке мы дадим описание всех максимальных идеалов рассматриваемого кольца (теорема 1), среди которых содержатся максимальные идеалы, не включающиеся в схему Д. А. Райкова.

В дальнейшем мы вместо кольца $V^{(b)}$ будем изучать следующее изоморфное ему кольцо R_L. Элементами кольца R_L являются вполне аддитивные комплексные функции множеств $\varphi(E)$, $\psi(E), \ldots$ Нормой элемента кольца служит его полная вариация. Умножение определено формулой

$$\varphi * \psi(E) = \int \varphi(E-t)\,\psi(dt), \tag{2}$$

а сложение — обычным способом.

Все аксиомы коммутативного нормированного кольца легко проверяются. Каждому максимальному идеалу нормированного кольца соответствует гомоморфизм кольца в тело комплексных чисел и обратно. Простой пример гомоморфизмов кольца R_L в тело комплексных чисел дает формула

$$M_\lambda[\varphi] = \int e^{i\lambda t}\varphi(dt) \tag{3}$$

при вещественных значениях λ.

Максимальные идеалы, определяемые гомоморфизмами вида (3), мы будем называть основными.

Пусть дан произвольный гомоморфизм $M[\varphi]$ кольца R_L в тело комплексных чисел. Мы можем рассматривать $M[\varphi]$ как линейный функционал на пространстве мер, тогда он представим в виде

$$M[\varphi] = \int m_\varphi(t)\,\varphi(dt). \tag{4}$$

В формуле (4) $m_\varphi(t)$ есть так называемая обобщенная функция: это значит, что для каждой меры φ $m_\varphi(t)$ является почти всюду по $d\varphi$ ограниченной измеримой по $d\varphi$ функцией от t.

Если мера φ_1 абсолютно непрерывна относительно φ, то $m_{\varphi_1}(t) = m_\varphi(t)$ почти всюду по мере φ_1.

Определение 1. Обобщенная функция $m_\varphi(t)$ называется обобщенным характером, если выполняется функциональное уравнение

$$m_\varphi(t)\, m_\varphi(s) = m_\varphi(t+s) \tag{5}$$

для почти всех пар (t, s) по произведению мер $\varphi \times \varphi$.

Теперь структура произвольного гомоморфизма кольца R_L в тело комплексных чисел может быть описана следующим образом.

Теорема 1. *Всякий гомоморфизм кольца R_L в тело комплексных чисел задается формулой*

$$M[\varphi] = \int m_\varphi(t)\, \varphi(dt), \tag{6}$$

где $m_\varphi(t)$ — обобщенный характер, удовлетворяющий условию

$$|\, m_\varphi(t)\, | \leqslant 1. \tag{7}$$

Обратно, формула (6) *в сочетании с условием* (7) *всегда дает гомоморфизм кольца R_L.*

Со всяким обобщенным характером, а следовательно, и со всяким гомоморфизмом кольца R_L связано следующее разложение кольца мер в прямую сумму попарно сингулярных подкольца R и идеала I

Именно, идеал I состоит из всех тех мер φ, для которых $m_\varphi(t) \equiv 0$ а подкольцо R состоит из мер, для которых $m_\psi(t) \neq 0$ почти всюду, по $d\psi$.

Ясно, что если $\varphi \in I$, а $\psi \in R$, то мера φ сингулярна к мере ψ и что любая мера ϑ однозначно представима в виде $\vartheta = \vartheta_I + \vartheta_R$, где $\vartheta_I \in I$, а $\vartheta_R \in R$.

Пример. Для основных максимальных идеалов подкольцо R совпадает со всем кольцом R_L, а идеал I состоит из нуля.

Более сложный пример дает такое разбиение кольца R_L, когда I состоит из всех непрерывных мер, а R из мер, сосредоточенных на счетном множестве точек.

Всякому разбиению кольца R_L в прямую сумму попарно сингулярных подкольца R и идеала I можно поставить в соответствие обобщенный характер $m_\varphi(t)$, например, такой, который равен единице, если $\varphi \in R$, и нулю, если $\varphi \in I$.

Следующая конструкция доставляет нам максимальные идеалы, не укладывающиеся, вообще говоря, в схему Д. А. Райкова.

Именно, мы возьмем совокупность K функций $\chi(t)$ (вообще, неизмеримых), удовлетворяющих уравнению

$$\chi(t+s) = \chi(t)\, \chi(s). \tag{8}$$

Тогда совокупность R_K мер ψ, для которых любая функция $\chi(t) \in K$, является измеримой по $d\psi$, образует подкольцо кольца R_L, а сингулярное дополнение к R_K образует идеал I_K в кольце R_L. Можно показать, что при соответствующем выборе совокупности K соответствующий гомоморфизм кольца R_L в тело комплексных чисел не может быть описан конструкцией Д. А. Райкова.

Определение 2. Положим $\varphi^*(E)=\overline{\varphi(-E)}$, тогда мы назовем максимальный идеал M симметричным, если всегда $M[\varphi^*]=\overline{M[\varphi]}$.

Основные максимальные идеалы являются симметричными.

Оказывается, что в кольце R_L существуют несимметричные максимальные идеалы.

Отсюда можно вывести, что кольцо R_L несимметрично ([3]).

Как известно ([1]), в пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов любого нормированного кольца можно ввести бикомпактную хаусдорфову топологизацию.

Так как, очевидно, замыкание в $\mathfrak{M}$ множества симметричных максимальных идеалов состоит из симметричных максимальных идеалов, то из вышесказанного следует, что замыкание основных максимальных идеалов кольца R_L не содержит всех максимальных идеалов этого кольца.

Отсюда вытекает следующий результат, который пытались доказать Wiener и Pitt ([4]).

Обозначим через G совокупность функций $f(\lambda)$, являющихся преобразованием Фурье — Стильтьеса для функций с ограниченным изменением:

$$f(\lambda)=\int e^{i\lambda s}\sigma(ds). \tag{9}$$

Тогда существует функция $f(\lambda)\in G$ такая, что $|f(\lambda)|>d>0$ при всех значениях λ, и такая, что $1/f(\lambda)\,\overline{\in}\,G$.

В работе ([4]) это утверждение сформулировано, но данное там доказательство основано, повидимому, на неверных утверждениях.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. М. Гельфанду за постановку задачи и внимание, проявленное при ее решении.

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Матем. сб., **9** (51), 1, 3 (1941). [2] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов. Усп. матем. наук, **1**, в. 2 (12) (1946). [3] Д. А. Райков, ДАН, **54**, № 5 (1946). [4] N. Wiener and H. R. Pittf, Duke Math. J., **4**, № 2 (1938).