Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. С. ФЕДОРОВ

О ПРОИЗВОДНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 4 X 1948)

1. Пусть имеем действительные функции $u=u(t)$, $v=v(t)$, определенные и непрерывные на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ и дифференцируемые в промежутке $0<t<T$, а в остальном произвольные. Полагаем

$$\varphi(t)=u+iv, \quad \varphi'(t)=\frac{du}{dt}+i\,\frac{dv}{dt}, \quad \tau=\frac{\varphi(T)-\varphi(0)}{T}.$$

M — множество точек плоскости комплексного переменного, изображающих значения $\varphi'(t)$ для всех значений t промежутка $0<t<T$.

Теорема. *Всякая прямая, проведенная на плоскости комплексного переменного через точку τ, пересекает множество M, т. е. имеет хоть одну общую точку с M.*

Доказательство (от противного). Допустим, что существует прямая L, проведенная на плоскости комплексного переменного через точку τ и не пересекающая M. Пусть λ — точка прямой L, отличная от точки τ. Построим функцию $F(t)=\lambda t-\varphi(t)$.

Так как прямая L не имеет точек, общих с M, то

$$F'(t)=\lambda-\varphi'(t)\neq 0. \quad (0<t<T), \tag{1}$$

и далее

$$F(T)-F(0)=T(\lambda-\tau)\neq 0. \tag{2}$$

Полагаем $F(t)=p+iq$, где p и q — действительные. Будем иметь, в силу (1) и (2):

1) dp/dt и dq/dt существуют и не обращаются одновременно в нуль в промежутке $0<t<T$.

2) Полагая $\Delta p=p(T)-p(0)$, $\Delta q=q(T)-q(0)$, получим, что хоть одна из этих разностей не равна нулю.

Если, например, Δp отлична от нуля, то, по известной формуле Коши, имеем

$$\frac{\Delta q}{\Delta p}=\frac{q'(t_0)}{p'(t_0)}, \quad 0<t_0<T,$$

откуда

$$\Delta p+i\Delta q=RF'(t_0), \tag{3}$$

где R действительно.

Из (1), (2) и (3) выводим, обозначая $\varphi'(t_0)$ через μ:

$$\lambda - \tau = \sigma(\lambda - \mu), \tag{4}$$

где σ действительно и отлично от нуля.

Равенство (4) показывает, что точки λ, τ и μ лежат на одной прямой. Значит, прямая L пересекает M. Мы пришли к противоречию, что и доказывает теорему.

Следствие. Для всякого числа ω в промежутке $0 \leqslant \omega < 2\pi$ найдутся: 1) такое действительное число δ и 2) такое число t_0 в промежутке $0 < t < T$, что

$$\frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{T} = \varphi'(t_0) + \delta e^{\omega i}. \tag{5}$$

2. Переходим теперь к функциям комплексного переменного z.

Пусть $f(z)$ непрерывна на прямолинейном отрезке с концами в точках a и b и моногенна во всех внутренних точках этого отрезка. Для всякой точки z этого отрезка полагаем $z = a + te^{\alpha i}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T = |b - a|$, $f(z) = \varphi(t)$ и применяем формулу (5), обозначая: $\zeta = a + t_0 e^{\alpha i}$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \nu$.

Получим:

$$\nu = f'(\zeta) + \delta e^{(\omega - \alpha) i}.$$

Таким образом, всякая прямая, проведенная через точку ν, пересекает множество точек $f'(z)$, где z пробегает все внутренние точки отрезка $[a, b]$.

Отсюда выводим следующий достаточный признак однолистности $f(z)$ в некоторой выпуклой области D, в которой $f(z)$ моногенна: имеется такая действительная постоянная α что $f'(z)e^{\alpha i}$ не будет действительным ни при каком z из D. (Например, $f'(z)$ не будет действительным ни при каком z из D.)

3. Если P — параллелограм с вершинами в точках z_1, z_2, z_3, z_4 ($z_2 - z_1 = z_3 - z_4$) и если $f(z)$ непрерывна и моногенна внутри и на сторонах P, то всякая прямая, проведенная через точку, изображающую комплексное число $[f(z_1) + f(z_3) - f(z_2) - f(z_4)] / (z_2 - z_1)(z_3 - z_2)$, пересечет множество точек, изображающих значения второй производной $f''(z)$, где z пробегает внутренность P.

Поступило
3 X 1948