Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. А. САПОГОВ

О СУММАХ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 X 1948)

1. В настоящей заметке дается оценка погрешности предельной формулы одной общей теоремы С. Н. Бернштейна ((1), § 10). Эта оценка позволяет установить некоторые неравенства для сумм зависимых случайных величин, аналогичные тем, которые были использованы А. Н. Колмогоровым (2) при доказательстве закона повторного логарифма для сумм независимых величин.

Через $P\{\ldots\}$ будем обозначать вероятность события, указанного в скобках. $M(z)$ обозначает математическое ожидание величины z a priori, $\underset{(u_k,\ k<i)}{M'}(z)$ — условное математическое ожидание z при предположении, что величины u_k с индексами $k<i$ получили определенные значения.

$\underset{(u_k,\ k<i)}{\sup} M'(z)$ и $\underset{(u_k,\ k<i)}{\inf} M'(z)$ обозначают точную верхнюю и точную нижнюю границы $\underset{(u_k,\ k<i)}{M'}(z)$ относительно различных возможных значений $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$. Изменение $M'(z)$ определяется как разность $\sup M'(z)$ и $\inf M'(z)$:

$$\underset{(u_k,\ k<i)}{\text{изм}} M'(z) = \underset{(u_k,\ k<i)}{\sup} M'(z) - \underset{(u_k,\ k<i)}{\inf} M'(z).$$

2. Начнем с основной леммы работы (1) (§ 9) С. Н. Бернштейна. Мы придадим ей следующую форму.

Лемма. *Пусть* $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ *является суммой зависимых величин* u_i,

$$M(u_i)=0, \qquad M(s_n^2)=B_n,$$

$$\alpha_i = \underset{(u_k,\ k<i)}{\text{изм}} M'(u_i), \qquad \beta_i = \underset{(u_k,\ k<i)}{\text{изм}} M'(u_i^2), \qquad c_i = \underset{(u_k,\ k<i)}{\sup} M'\left|u_i^2\right|;$$

тогда

$$\left| P\{z_0\sqrt{B_n} < s_n < z_1\sqrt{B_n}\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2/2}dz \right| < \frac{C_1}{\sqrt[8]{T_n}}, \tag{1}$$

где

$$\frac{1}{T_n} = \frac{\sum_1^n \alpha_i}{\sqrt{B_n}} + \frac{\sum_1^n \beta_i}{B_n} + \frac{\sum_1^n C_i}{B_n^{3/2}},$$

z_0 и $z_1 > z_0$ — произвольные вещественные числа (C_1, C_2, ... всюду обозначают постоянные).

Действительно, полагая $y_k = \frac{u_k}{\sqrt{B_n'}}$ $\left(B_n' = \sum_{i=1}^{n} M(u_i^2)\right)$, находим

$$\underset{(u_k,\ k<i)}{M'}(e^{i\xi y_k}) = 1 - \frac{M(u_k^2)}{2B_n'}\xi^2 + \delta_k,$$

где при достаточно больших T_n

$$|\delta_k| < C_2 N^3 \left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{B_n}} + \frac{\beta_k}{B_n} + \frac{C_k}{B_n^{3/2}}\right), \tag{2}$$

если $|\xi| < N$ $(N > 1)$.

Пусть

$$G_n = M\left(e^{i\xi \sum_1^n y_k}\right), \qquad E_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{M(u_k^2)}{2B_n'}\xi^2\right).$$

Повторяя почти дословно рассуждения С. Н. Бернштейна ((1), § 9), благодаря (2) получаем

$$|G_n - E_n| < \frac{C_2 N^3}{T_n},$$

каково бы ни было $|\xi| < N$, если только T_n достаточно велико.

Положим $N = \sqrt[4]{T_n}$. Тогда

$$|G_n - E_n| < \frac{C_2}{\sqrt[4]{T_n}}. \tag{3}$$

С другой стороны, при том же условии $|\xi| < N = \sqrt[4]{T_n}$, для достаточно больших T_n без труда устанавливаем неравенство

$$|E_n - e^{-\xi^2/2}| < \frac{1}{\sqrt[3]{T_n}},$$

вместе с (3) оно приводит к

$$|G_n - e^{-\xi^2/2}| < \frac{C_3}{\sqrt[4]{T_n}},$$

каково бы ни было $|\xi| < \sqrt[4]{T_n}$.

Полученное неравенство, устанавливающее степень приближения характеристических функций G_n сумм величин $\sum_1^n y_k$ к характеристической функции $e^{-\xi^2/2}$ закона Гаусса, позволяет оценить разность между соответствующими законами распределения, а именно, после надлежащих вычислений находим, что

$$\left| P\left\{z_0\sqrt{B_n'} < s_n < z_1\sqrt{B_n'}\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-x^2/2}\,dx \right| < \frac{C_4}{\sqrt[8]{T_n}}. \tag{4}$$

Кроме того, легко убедиться в справедливости неравенства

$$\left|\frac{B_n'}{B_n} - 1\right| < \frac{C_5}{T_n}. \tag{5}$$

Следовательно, если T_n достаточно велико, справедливость (1) вытекает из (4) и (5). Но в таком случае (1) справедливо при любом T_n. Впрочем, нас будет интересовать только случай $T_n \to \infty$; в этом случае С. Н. Бернштейн называет величины u_i почти независимыми.

3. Неравенство (1) дает возможность установить оценку предельной формулы той общей теоремы С. Н. Бернштейна, о которой упоминалось выше. Не останавливаясь на не представляющих затруднений вычислениях, укажем дополненную оценкой остаточного члена формулировку этой теоремы С. Н. Бернштейна ([1], § 10).

Теорема. *Пусть* $s_n = \sum_1^n x_i$ — *сумма зависимых величин, обладающих следующими свойствами:*

1) $M(s_n^2) = B_n > Hn^{\lambda}$, *где* $\lambda > 2/3$;

2) $\sup\limits_{(x_k,\ k<i)} M' |x_i^3| < L$;

3) *выполняется одно из неравенств:*

$$\sup_{(x_k,\ k \leqslant i)} M'(x_{i+1} + \ldots + x_{i+g})^2 < N g^{\lambda}$$

или

$$\sup_{(x_k,\ k \leqslant i)} M'(x_{i+1} + \ldots + x_{i+g})^2 < N g n^{\lambda-1},$$

каково бы ни было целое $g > 0$;

4) $\underset{(x_k,\ i-k>n^{\rho})}{\text{изм}} M'(x_i) < \frac{1}{n^{\mu}}$, *где* $\rho < \frac{\lambda}{2}$ *есть положительное фиксированное число и постоянная* $\mu > 1 - \frac{\lambda}{2}$;

$$\underset{(x_k,\ i-k>n^{\rho};\ j-k>n^{\rho})}{\text{изм}} M'(x_i x_j) < \frac{1}{n^{2-\lambda}}.$$

При этих условиях

$$\left| P\{z_0\sqrt{B_n} < s_n < z_1\sqrt{B_n}\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2/2}dz \right| < C_6 n^{-\tau}, \tag{6}$$

где $\tau > 0$ *некоторая постоянная (определяемая постоянными* λ, μ *и* ρ*), каковы бы ни были вещественные числа* z_0 *и* $z_1 > z_0$ *(*H, N *и* L *постоянные).*

4. Положим в неравенстве (6) $z_1 = +\infty$, $z_0 = b\sqrt{2\ln\ln B_n}$, где b — положительная постоянная.

Тогда, принимая во внимание асимптотическое равенство

$$\int_t^{\infty} e^{-t^2/2}dt \sim \frac{1}{t}\, e^{-t^2/2} \qquad (t \to \infty),$$

найдем при $n \to \infty$

$$P\left\{s_n \underset{e}{>} b\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\ln\ln B_n}\,(\ln B_n)^{b^2}}.$$

Следовательно, *если случайные величины x_i удовлетворяют всем условиям предельной теоремы С. Н. Бернштейна ($n^\circ 3$), то, каковы бы ни были данные $b > 0$, $\varepsilon > 0$, при всех достаточно больших n справедливы неравенства*

$$\frac{1}{(\ln B_n)^{(1+\varepsilon)b^2}} < P\left\{s_n > b\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}\right\} < \frac{1}{(\ln B_n)^{(1-\varepsilon)b^2}}. \tag{7}$$

Неравенства, аналогичные доказанным, но полученные совсем другим методом, были, как уже упоминалось, использованы А. Н. Колмогоровым при доказательстве закона повторного логарифма для сумм независимых величин.

Применение неравенств (7) для доказательства закона повторного логарифма в случае сумм зависимых случайных величин будет служить предметом специальной заметки автора.

Поступило
6 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Усп. матем. наук, **10**, 65 (1944). [2] A. Kolmogoroff, Math. Ann., **101**, 126 (1929).