Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

КРИВЫЕ В МНОГООБРАЗИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Эта заметка посвящена началам теории кривых на двумерных многообразиях ограниченной кривизны в том смысле, как они были определены в моем предыдущем сообщении ([1]) *. Там же были даны определения основных понятий, как кратчайшая, угол между кривыми, кривизна множества, площадь. В дальнейших формулировках без оговорок имеется в виду, что речь идет о произвольном многообразии ограниченной кривизны и упомянутые понятия понимаются в смысле определений, данных в ([1]).

Формулируемые здесь определения и теоремы подобны тем, какие были установлены мною во внутренней геометрии выпуклых поверхностей ([2]), но в ряде пунктов имеются существенные отличия. Теоремы § 3 новы и для римановых многообразий.

§ 1. Направление кривой. Мы говорим, что кривая имеет в своей начальной точке определенное направление, если она образует сама с собой определенный угол. Этот угол (если он существует), очевидно, равен нулю. В частности, кратчайшая заведомо имеет определенные направления в концах.

Теорема 1. *Для того чтобы две кривые, исходящие из одной точки, образовывали друг с другом определенный угол, необходимо и достаточно, чтобы они имели в этой точке определенные направления.*

Здесь, в частности, содержится уже высказанная в ([1]) теорема о том, что между двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует определенный угол.

Теорема 2. *Угол между кривыми, исходящими из одной точки O, равен пределу угла между их хордами (кратчайшими) OX, OY при $X, Y \to 0$.*

Существование этого предела эквивалентно существованию угла. В частности, существование направления равносильно тому, что угол между хордами одной и той же кривой стремится к нулю.

Мы говорим, что кривые имеют в точке O одно направление, если угол между ними существует и равен нулю. Самое направление из данной точки можно определить как класс кривых, исходящих из этой точки, касающихся друг друга. Это определение правомерно потому, что если углы между кривыми L_1 и L_2, L_2 и L_3 равны нулю, то угол между L_1 и L_3 также существует и равен нулю.

Под углом между направлениями можно понимать угол между любыми двумя кривыми, принадлежащими соответствующим классам. Это определение правомерно потому, что если угол между кривыми равен нулю, то с любой кривой они образуют равные углы.

* Определение, данное в ([1]), говорит о сумме «избытков» попарно «неперекрывающихся» треугольников. Данное там определение неперекрывающихся треугольников неудовлетворительно. Его нужно заменить следующим. Два треугольника не перекрываются, если их можно заключить в области, гомеоморфные замкнутому кругу и не имеющие общих внутренних точек.

Две кривые, исходящие из одной точки, разбивают окрестность этой точки на два сектора. Углом сектора при точке O называется точная верхняя граница сумм углов между последовательными кривыми, идущими в секторе из точки O, начиная от одной ограничивающей сектор кривой и кончая другой. (Предполагается, что кривые не пересекаются в некоторой окрестности O.)

В связи с этим возникают два угла между двумя направлениями из одной точки, соответственно углам двух секторов, ограничиваемых парой кривых, идущих в этих направлениях.

Теорема 3. *Углы секторов складываются как обычно. Если на кривых L, M, исходящих из O, сколь угодно близко к O есть точки, соединяемые кратчайшими внутри сектора V между L и M, то угол сектора V равен углу между L и M.*

Теорема 4. *Множество направлений из одной точки O с метрикой углов между ними изометрично множеству образующих замкнутого конуса.*

Полный угол θ вокруг точки O, т. е. полный угол вокруг вершины этого конуса, может быть, вообще говоря, любым $\geqslant 0$; но *всюду, кроме самое большее счетного множества точек, он равен* 2π. Если $\theta = 0$, то конус сводится к полупрямой и в такой точке все исходящие из нее кривые касаются друг друга.

Теорема 5. *Множество направлений из данной точки, в которых не исходит никакая кратчайшая, есть G_δ угловой меры нуль.*

В отличие от того, что имеет место на выпуклых поверхностях, в одном направлении из данной точки может исходить несколько и даже бесконечно много кратчайших. Тому есть совершенно элементарные примеры.

§ 2. Поворот. Пусть L — кривая без кратных точек, имеющая определенные направления в концах*. Различаем у нее две стороны: „правую" и „левую". Пусть L^* ломаная (из кратчайших) без кратных точек, соединяющая концы кривой L, не имеющая с L других общих точек и проходящая „справа" („слева") от L, т. е. так, что область G, ограниченная $L + L^*$, лежит справа (слева) от L. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — углы секторов, образуемых звеньями ломаной L^* со стороны, противоположной области G, а α, β — углы тех секторов между ломаной L^* и кривой L в их концах, которые содержатся в G.

Правым (левым) поворотом кривой L называется предел сумм $\alpha + \beta + \sum (\pi - \varphi_i)$ при условии, что ломаные L^* сходятся к кривой L.

Теорема 6. *Всякая кривая без кратных точек и с определенными направлениями в концах имеет правый и левый повороты, т. е. указанный предел всегда существует.*

Легко ввести понятие поворота для кривой с конечным числом кратных точек, пользуясь ломаными, имеющими такое же строение.

В силу теоремы 6, всякая кратчайшая имеет определенный поворот, однако он может и не равняться нулю. Пример дает поверхность, составленная из двух усеченных конусов, сложенных меньшими основаниями. Дуга их общей окружности меньших оснований будет кратчайшей с отрицательным поворотом с обеих сторон.

Теорема 7. *Поворот кратчайшей всегда неположителен.*

Это есть частный случай общей теоремы, наглядное содержание которой очевидно.

---

* Особый случай, когда полный угол вокруг хотя бы одного из концов равен нулю, мы здесь для краткости не рассматриваем.

Теорема 8. *Если кривая L входит в границу области G и является кратчайшей в этой области, то поворот каждой ее дуги со стороны области G неположителен.*

Не всякая кривая с неположительным поворотом на обе стороны будет кратчайшей. Однако имеет место следующая

Теорема 9. *Пусть кривая L, входящая в границу области G, имеет со стороны G неположительный поворот. Пусть внутри G отношение кривизны к площади ограничено сверху для каждой подобласти одним и тем же телом. Тогда кривая L будет кратчайшей в G на каждом достаточно малом участке.*

Теорема 10. *Пусть кривая L разбита на дуги L_1, L_2 точкой A. Пусть τ, τ_1, τ_2 — повороты L, L_1, L_2 с одной стороны, а φ — угол сектора между L_1 и L_2 с той же стороны. Тогда $\tau = \tau_1 + \tau_2 + (\pi - \varphi)$. Последнее слагаемое есть „поворот кривой L в точке A“.*

Удобно приписывать поворот открытой дуге кривой, а для дуг с присоединенными концами прибавлять еще повороты в концах. Исключение составляют концы самой кривой, повороты в которых не определены. Поэтому удобно считать кривую как бы открытой — с исключенными концами. При такой точке зрения теорема 10 означает не что иное, как аддитивность поворота как функции дуги.

Мы говорим, что кривая имеет поворот ограниченной вариации, если, во-первых, каждая ее дуга имеет поворот и, во-вторых, сумма абсолютных величин правых (левых) поворотов ее дуг ограничена одним числом при любом разбиении ее на дуги. Точная верхняя граница этих сумм есть вариация правого (левого) поворота.

Теорема 11. *У кривой с поворотом ограниченной вариации поворот есть вполне аддитивная функция дуги.*

Теорема 12. *Кривая с поворотом ограниченной вариации имеет конечную длину.*

Теорема 13. *Сумма „правого“ и „левого“ поворотов всякой кривой без кратных точек равна кривизне кривой, как множества точек, но с исключением концов кривой.*

Вследствие полной аддитивности кривизны отсюда следует, что если у кривой поворот с одной стороны ограниченной вариации, то он ограниченной вариации и с другой стороны.

§ 3. Кривые ограниченного поворота в целом.

Теорема 14. *Пусть кривая L ограничивает вместе с кратчайшей L_0, соединяющей ее концы, область G, гомеоморфную кругу. Пусть τ и τ_0 — вариации поворотов L и L_0 со стороны G, s и s_0 — длины L и L_0, Ω — абсолютная кривизна G (см. ([1])). Если $\Omega + \tau + \tau_0 < \pi$, то $s_0 \geqslant s \cos \frac{\Omega + \tau + \tau_0}{2}$.*

Из теоремы 16 следует, что для длины s кривой без кратных точек, лежащей в гомеоморфной кругу выпуклой* области диаметра d с абсолютной кривизной Ω и имеющей вариацию поворота τ (с одной из сторон), при $\Omega + \tau < \pi$ имеет место неравенство $d \geqslant s \cos \frac{\Omega + \tau}{2}$.

Однако и при $\Omega + \tau \geqslant \pi$ длина кривой может быть ограничена в зависимости от d, Ω, τ. Для точной формулировки введем величину $\tau^+(L)$ — „положительную часть поворота кривой L“. Разбиваем L на дуги и для каждой дуги берем поворот с той стороны, где он положителен (а если он ни с одной стороны не положителен, то берем нуль, если же положителен с обеих сторон, то берем меньший). Точная верхняя граница сумм таких поворотов по всем разбиениям L

* Область выпуклая, если каждые две ее точки соединимы лежащей в ней кратчайшей.

на дуги и будет $\tau^+(L)$. Для кривой, абсолютная кривизна которой равна нулю, τ^+ равно вариации поворота с любой стороны.

Теорема 17. *Пусть гомеоморфная кругу выпуклая область G имеет положительную часть кривизны $\omega^+ < 2\pi$. Тогда длина s всякой лежащей в ней кривой L, имеющей, может быть, кратные точки, ограничена в зависимости от: 1) $\tau^+ = \tau^+(L)$, 2) ω^+ и 3) периметра p области G. Так, заведомо,* $s < \frac{8p}{2\pi - \omega^+}\left(1 + \frac{\tau^+}{2\pi - \omega^+}\right)^2$.

Если d — диаметр области G и ω^- — отрицательная часть ее кривизны, то $p \leqslant (2\pi + \omega^-)d$, и потому получаем также оценку длины s через τ^+, d, ω^+, ω^-. (Эти оценки не точны, но дают правильную качественную картину зависимости верхней границы для s от τ^+, ω^+ и др. При $\omega^+ \geqslant 2\pi$ s не имеет верхней границы.)

Так как по теореме 7 для геодезической, т. е. кривой, кратчайшей на каждом достаточно малом отрезке, $\tau^+ = 0$, то для нее $s = \frac{8p}{2\pi - \omega^+}$. Отсюда, между прочим, следует, что геодезическая при бесконечном продолжении должна уходить из всякой данной области с $\omega^+ < 2\pi$. Это заключает как частный случай результат, полученный Кон-Фоссеном [3] в гомеоморфном плоскости полном римановом многообразии положительной кривизны. Кон-Фоссен существенно использует положительность гауссовой кривизны. Между тем, теорема 15 имеет совершенно общий характер. Метод ее доказательства таков, что в рамках римановой геометрии он не осуществим.

Теорема 16. *Если кривая L лежит в гомеоморфной кругу области G и $\tau^+ + \omega^+ < 2\pi$, то кривая L или не имеет кратных точек, или состоит из простой петли и двух или одной непересекающих эту петлю ветвей без кратных точек.*

Петлей мы называем кривую, у которой начало и конец совпадают, образуя „вершину“ петли, и отличаем ее от замкнутой кривой, у которой начало и конец вовсе не определены. В повороте петли поворот в вершине не учитывается. „Простая петля“ не имеет кратных точек.

Теорема 17. *Пусть гомеоморфное плоскости полное многообразие R имеет определенную кривизну* ω. Пусть M — произвольная ограниченная часть R. Если $\omega \leqslant \pi$, то при всяком $\varepsilon > 0$ существует область $G \supset M$ такая, что всякая точка из $R - G$ есть вершина простой петли, охватывающей M и имеющей такой поворот τ с внутренней стороны, что $|\tau - (\pi - \omega)| < \varepsilon$. Если же $\omega > 2\pi - \frac{\pi}{n}$, то существует такая область G, что всякая точка из $R - G$ есть вершина геодезической петли, охватывающей M n раз.*

Теоремы 16 и 17 также обобщают два результата Кон-Фоссена, касающиеся геодезических [3]. Но, в отличие от теоремы 15, они выводятся по существу так же, как у Кон-Фоссена.

Ленинградское отделение
Математического института
Академии наук СССР

Поступило
11 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, **60**, № 9 (1948). [2] А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, 1948. [3] С. Э. Кон-Фоссен, Матем. сб., **1** (43), 139 (1936).

* $\omega(R)$ определяется как $\omega^+(R) - \omega^-(R)$, а $\omega^+(R)$, $\omega^-(R)$ определяются как $\sup \omega^+(M)$, $\sup \omega^-(M)$ по всем компактным $M \subset R$.