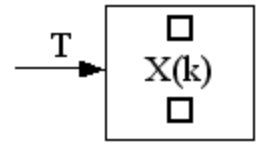
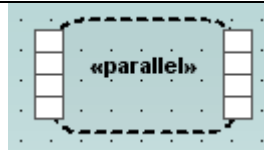


## Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
К устройств типа X, через которые k параллельных потоков транзактов типа T			«Область расширения, параллельное соединение» (Expansion Region, parallel) (диаграмма деятельности)

Таким образом, благодаря достигнутому соглашению в графических примитивах для представления общих понятий имитационной модели, все заинтересованные лица смогут сконцентрироваться на проектировании и анализе предметной области.

### Литература

1. Фаулер, М. UML. Основы / М. Фаулер. – СПб.: Символ-Плюс, 2007. – 192 с.
2. Ларман, К. Применение UML 2.0 и шаблонов проектирования. Практическое руководство / К. Ларман. – М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2009. – 736 с.

**К.С. Курочка, Е.В. Лозовская**

**УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь**

### **КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ТОНКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЕ**

В последнее время для решения электромагнитных задач в конечных областях широкое распространение получил векторный метод конечных элементов [1]. Векторные конечноэлементные аппроксимации позволяют корректно моделировать «скачки» электромагнитного поля при наличии неоднородных по свойствам областей, обеспечивая непрерывность одной из компонент решения (нормальной или тангенциальной), допуская разрывность другой. Особенности векторных постановок позволяют естественным образом учитывать граничные условия для тангенциальных и нормальных компонент искомого электрического или магнитного поля [2].

Введем следующие обозначения. Пусть  $R^2$  – двумерное евклидово

пространство. Через  $\Omega$  обозначим ограниченную часть этого пространства,  $\partial\Omega$  – его граница,  $\vec{n}$  – единичный касательный вектор к  $\partial\Omega$ . Пусть плоская область  $\Omega$ , в которой решается краевая задача, может быть разбита на конечное число подобластей. Предположим, что граница области сверхпроводящая, свободные электрические заряды отсутствуют, в рассматриваемое электрическое поле и ток представляют собой периодические по времени функции с постоянной круговой частотой  $\omega$ :  $\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x) \cdot e^{-q\omega t}$ ,  $\vec{B}(x,t) = \vec{B}(x) \cdot e^{-q\omega t}$ ,  $\vec{J}(x,t) = \vec{J}(x) \cdot e^{-q\omega t}$ , где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\vec{B}$  – магнитная индукция,  $\vec{J}$  – плотность электрического тока,  $q$  – мнимая единица,  $t$  – время.

Для описания электрического поля воспользуемся уравнением Гельмгольца [3]:

$$\text{rotrot}\vec{E} + k^2\vec{E} = 0, \quad (1)$$

где  $k^2 = (q\omega\sigma\mu - \omega^2\varepsilon\mu)$  – волновое число,  $\sigma$  – электрическая проводимость,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость. Для непроводящих сред, где  $\sigma = 0$ , эта величина является вещественной.

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор  $\mathfrak{Z}$ , определяемый следующим образом:

$$\mathfrak{Z}\vec{u} = [\text{rotrot} - k^2]\vec{u}. \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) может быть записано в виде  $\mathfrak{Z}\vec{E} = 0$ .

Используя свойство самосопряженности  $\mathfrak{Z}$ , квадратичный функционал  $\Phi$  для вариационной постановки можно записать в виде [5]:

$$\Phi(\vec{E}) = \langle \vec{E}, \mathfrak{Z}\vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E}^* \cdot [\text{rotrot} \vec{E} - k^2 \vec{E}] d\Omega, \quad (3)$$

где  $\vec{E}^*$  – комплексно сопряжен с  $E$ ,  $\langle \vec{E}, \mathfrak{Z}\vec{E} \rangle$  – скалярное произведение.

Преобразуя уравнение (3) к виду, в котором были бы явно отражены краевые условия задачи, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{E}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\vec{E}^* \cdot \text{rotrot}\vec{E} - \text{rot}\vec{E} \cdot \text{rot}\vec{E}^* + \text{rot}\vec{E} \cdot \text{rot}\vec{E}^* - k^2 \vec{E} \cdot \vec{E}^*] d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{[\vec{E}^* \cdot \text{rotrot}\vec{E} - \text{rot}\vec{E} \cdot \text{rot}\vec{E}^*]}_{I_1} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\text{rot}\vec{E} \cdot \text{rot}\vec{E}^* - k^2 \vec{E} \cdot \vec{E}^*] d\Omega. \end{aligned}$$

Применяя к интегралу  $I_1$  первую векторную теорему Грина, а также воспользовавшись свойством смешанного векторно-скалярного произведения и учитывая однородность краевых условий имеем

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\text{rot}\vec{E} \cdot \text{rot}\vec{E}^* - k^2(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)] d\Omega + \frac{1}{2} \int_c \alpha (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot (\vec{n} \times \vec{E}^*) dS, \quad (4)$$

где  $C$  – часть контура, на котором выполняются граничные условия.

Выполним дискретизацию области  $\Omega$  двумерными прямоугольными конечными элементами (КЭ) со сторонами, параллельными координатным осям [3]:  $\Omega = \bigcup_{l=1}^n \Omega_l$ . Предположим, что поле  $\vec{E} = (E_x, E_y)^T$  на прямоугольном КЭ таково, что имеет постоянную тангенциальную компоненту вдоль каждой из сторон. Будем аппроксимировать поле внутри прямоугольного элемента по формуле

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^4 \vec{N}_i E_{(i)},$$

где  $\vec{N}_i$  – функция формы, имеющая нулевую тангенциальную составляющую вдоль всех сторон прямоугольника, за исключением  $i$ -ой, вдоль которой она равна единице,  $E_{(i)}$  – значение тангенциальной компоненты поля на  $i$ -ом ребре.

Согласно вариационного принципа минимума энергии [3] найдём минимальное значение функционала  $\Phi(\vec{E})$  в области  $\Omega$ :

$$\frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial E_i} = \sum_{i=1}^n \left\{ E_i \int_{\Omega} [\text{rot} \vec{N}_i \cdot \text{rot} \vec{N}_j - k^2 \vec{N}_i \vec{N}_j] d\Omega - \int_s (\vec{E}^* \times \text{rot} E) \vec{n} dS \right\} = 0. \quad (5)$$

Откуда:

$$\{E_i - k^2 F_i\} \{E_i\} = \int_s (\vec{E}^* \times \text{rot} E) \vec{n} dS \quad (6)$$

где 
$$E_i = \{e_{ij}^l\}_{i,j=1..4} = \int_{\Omega} (\text{rot} \vec{N}_i^l) \cdot (\text{rot} \vec{N}_j^m) d\Omega,$$

(7)

$$F_i = \{f_{ij}^l\}_{i,j=1..4} = \int_{\Omega} \vec{N}_i^l \cdot \vec{N}_j^m d\Omega. \quad (8)$$

Очевидно, при  $l \neq m$  как (7), так и (8) обращаются в ноль, поскольку  $\vec{N}_i^l$  и  $\vec{N}_j^m$  определены на различных прямоугольниках  $\Omega_l$  и  $\Omega_m$ . Если же  $l = m$ , то (7) и (8) соответственно можно записать в виде

$$e_{ij}^l = e_{ij}^{ll} = \int_{\Omega_l} (\text{rot} \vec{N}_i^l) \cdot (\text{rot} \vec{N}_j^m) d\Omega, \quad f_{ij}^l = f_{ij}^{ll} = \int_{\Omega_l} \vec{N}_i^l \cdot \vec{N}_j^m d\Omega. \quad (9)$$

По формулам (9) вычисляем локальные матрицы  $[E_i]$  и  $[F_i]$ , затем найденные значения подставляем в (6). Проведя преобразования в итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – основное уравнение векторного метода конечных элементов для прямоугольного элемента. По известному алгоритму [3] формируем глобальные матрицы  $[E]$  и  $[F]$ , учитываем краевые условия Дирихле и решаем полученную СЛАУ (6).

Для верификации алгоритма рассмотрим задачу определения

электромагнитного поля в области  $\Omega \in R^2$ , являющейся квадратом  $[0,1] \times [0,1]$ , внутри которого находится вакуум, а границы образованы идеально проводящим материалом.

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 2 \cos \pi x \cos \pi y k$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \vec{u}|_{x=0} &= -\sin \pi y i; & \vec{u}|_{x=1} &= \sin \pi y i; \\ \vec{u}|_{y=0} &= -\sin \pi x j; & \vec{u}|_{y=1} &= \sin \pi x j. \end{aligned}$$

Для данной задачи получаем СЛАУ в виде  $\{E_i\} \{E\} = \int_s F \cdot \vec{n} dS$ , где  $E_i$

вычисляется по формуле (7).

При моделировании область  $\Omega$  разбивалась на  $20 \times 20$  прямоугольных элементов, полученное решение сравнивалось с точным аналитическим решением [5] (таблица 1). Погрешность расчетов была не более 1 %.

Таблица 1 – Значения электрического поля

Координаты точки наблюдения		Аналитическое решение [5]		Численное решение для однородной пластины		Численное решение для неоднородной пластины	
x, м	y, м	$E_x$ , В/м	$E_y$ , В/м	$E_y$ , В/м	$E_x$ , В/м	$E_y$ , В/м	$E_x$ , В/м
0,100	0,100	-0,294	0,294	-0,293	0,294	-0,264	0,264
0,100	0,300	-0,770	0,182	-0,770	0,183	-0,692	0,164
0,300	0,100	-0,182	0,769	-0,182	0,769	-0,164	0,692
0,500	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Рассмотрим электрическое поле в неоднородном волноводе с теми же исходными данными и краевыми условиями (рисунок 1).

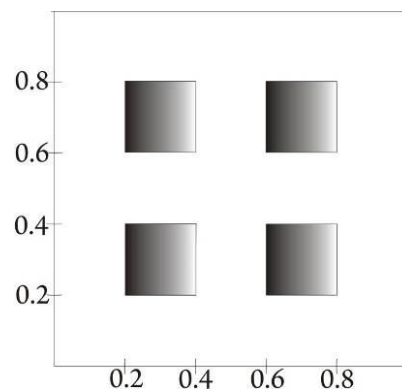


Рисунок 1 – Неоднородная пластина

Однако, в этом случае к граничным условиям на внешнем

проводнике добавляются граничные условия на внутренних идеально проводящих проводниках  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ . Полученное решение может быть использовано при рассмотрении задачи распространения электромагнитных волн в многосвязных волноводах.

### **Выводы**

1. Предложенная математическая модель, алгоритм и соответствующее программное обеспечение могут быть использованы для моделирования распределения электромагнитных полей в тонких пластинах.

2. Размещение во внутреннем объеме волновода проводящих элементов может снизить напряженность электрического поля.

### **Литература**

1. Nedelec, J.C. Mixed Finite Elements in  $R^3$  / J.C. Nedelec // Numer. Math. – 1980. – Vol. 35. – № 3. – P. 315–341.

2. Jianming, J. Finite element analysis of antenna and arrays / J. Jianming. – John Wiley & Sons, 2008. – 452 p.

3. Jianming, J. The Finite Element Method in Electromagnetics / J. Jianming. – John Wiley & Sons, 1993. – 780 p.

4. Bossavit, A. Computational Electromagnetism: Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements / A. Bossavit. – Academic Press, 1997. – 640 p.

5. Вайнштейн, Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1998. – 440 с.

**В.Н. Леванцов, В.С. Давыдов**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциса Скорины», Гомель, Беларусь**

## **РАЗРАБОТКА WEB-ПРИЛОЖЕНИЙ НА ПЛАТФОРМЕ XCODE**

### **Введение**

Высокие технологии и микрокомпьютеры заняли значительную часть жизни человека. С движением технологического прогресса составные части компьютера становятся всё меньше, что позволяет уменьшать и форм-фактор компьютеров. В данный момент на рынке активное распространение получают планшетные компьютеры – устройства, совмещающие в одном корпусе системный блок, монитор и