УДК 519.6:539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОГИБОВ ТОНКИХ ПЛИТ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

К.С.КУРОЧКА, В.В.ВОРОБЬЁВ
Учреждение образования
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. П.О. Сухого»
Гомель, Беларусь

При проектировании различных современных конструкций зачастую приходится сталкиваться с задачей определения прогибов тонкой плиты под действием динамической нагрузки. Эффективное решение данной проблемы возможно средствами компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов [1, 2, 3].

В качестве дискретной математической модели [3] тонкой плиты выбрано матричное дифференциальное уравнение:

$$M \cdot U'' + C \cdot U' + K \cdot U = F \tag{1}$$

где $M-$ матрица масс, C $-$ матрица демпфирования, $K-$ матрица жёсткости, $F-$ вектор узловых сил, $U-$ вектор узловых перемещений.

Воспользуемся гипотезами Кирхгофа [4], тогда для выражения поверхности прогиба можно принять полином, удовлетворяющий однородному дифференциальному уравнению изгибаемой плиты [1, 3].

Для определения перемещений $U(t+\Delta t)$ используется либо условие динамического равновесия в предыдущий момент времени (2), либо условие равновесия на опережающем интервале времени (3).

$$M \cdot U''_t + C \cdot U'_t + K \cdot U_t = F(t) \tag{2}$$

$$M \cdot U''_{t+\Delta t} + C \cdot U'_{t+\Delta t} + K \cdot U_{t+\Delta t} = F(t+\Delta t) \tag{3}$$

Для решения уравнений (2) и (3) можно воспользоваться различными методами: Ньюмарка, Вилсона и Рунге-Кутта 4-го порядка [1, 2]. В настоящей работе для исследования математической использовался метод Ньюмарка.

Предлагается следующий алгоритм метода Ньюмарка.

1. Определяются начальные значения для организации итерационного процесса:

1) формируются матрицы жесткости K, масс M и демпфирования C;

2) задаются начальные значения U'', U' и U;

3) выбирается временный шаг Δt и параметры $\delta \leq 0{,}5$ и $\alpha = 0{,}25 \cdot (0{,}5+\delta)^2$ и вычисляются постоянные интегрирования:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2};\ a_1 = \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t};\ a_2 = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t};\ a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \; a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right); \; a_6 = \Delta t(1-\delta); \; a_7 = \delta \cdot \Delta t;$$

4) формируется «эффективная» матрица жесткости $K^Э = K + a_0 M + a_1 C$;

5) матрица $K^Э$ приводится к треугольному виду.

2. Для каждого временного шага вычисляются:

1) эффективная нагрузка для момента времени $t + \Delta t$:

$$F^Э{}_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + M(a_0 \cdot U_t + a_2 \cdot U'_t + a_3 \cdot U''_t) + C(a_1 \cdot U_t + a_4 \cdot U'_t + a_5 \cdot U''_t);$$

2) перемещения в момент времени $t + \Delta t$, исходя из уравнения:

$$K^Э \cdot U_{t+\Delta t} = F^Э{}_{t+\Delta t}.$$

3) ускорения и скорости для момента $t + \Delta t$:

$$U''_{t+\Delta t} = a_0(U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2 U'_t - a_3 U''_t;$$

$$U'_{t+\Delta t} = U'_t - a_6 U''_t - a_7 U''_{t+\Delta t}.$$

Верификация осуществлялась на исследовании прогибов тонкой пластины со сторонами 1 м и толщиной 0,08 м глухо заделанной с двух соседних сторон из сплава D16T (модуль юнга $72 \cdot 10^9$ Па коэффициент Пуассона 0,35 плотность $2{,}7 \cdot 10^6$ кг/м^3) [4]. На угловую не заделанную точку пластины приложена динамическая нагрузка $F(t) = \sin(t)$ Н.

На рис. 1 приведены максимальные прогибы пластины, вызванные синусоидальной нагрузкой, в зависимости от времени. Пластина дискретизировалась 100 прямоугольными элементами [1, 3] с четырьмя узлами.

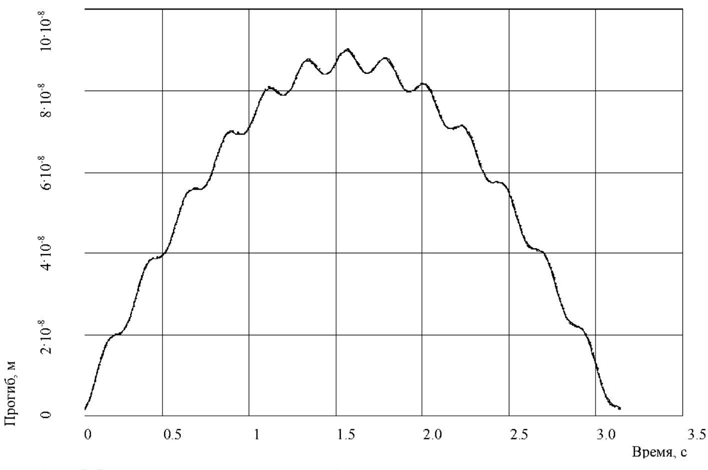

Рис. 1. Максимальные прогибы тонкой пластины под действием синусоидальной нагрузки.

Результаты моделирования сравнивались с решениями, найденными методом Вилсона и методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Расхождение полученных результатов различными методами на всём интервале интегрирования не превысило 15 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 544 с.

2. **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – М.; ДМК Пресс, 2007. – 600 с.

3. **Курочка, К. С.** Построение математической модели сложной системы неоднородных вязкоупругих дисперсных и сплошных твёрдых тел / К. С. Курочка // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – №4. – С. 18-31.

4. **Горшков, А. Г.** Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М.: Физматлит, 2002. – 416с.