Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 3

*МАТЕМАТИКА*

К. ПЕРСИДСКИЙ

# О ХАРАКТЕРИСТИЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕШЕНИЙ СЧЕТНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 IX 1948)*

Пусть дана счетная система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sm} x_m + \ldots \quad (s = 1,\ 2, \ldots), \tag{1}$$

где $p_{sk} = p_{sk}(t)$ — вещественные или комплексные функции независимого переменного $t$, непрерывные при $t \geqslant 0$.

Будем полагать, что при $t \geqslant 0$ выполняются неравенства:

$$|p_{s1}| + |p_{s2}| + \ldots + |p_{sm}| + \ldots \leqslant p(t) \quad (s = 1,\ 2, \ldots), \tag{2}$$

где $p(t)$ — непрерывная функция при $t \geqslant 0$.

Пусть

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ldots \tag{3}$$

счетная система функций, непрерывных при $t \geqslant 0$. Систему функций (3) будем называть ограниченной, если для любого наперед заданного сегмента $[0,\ a]$ существует такое число $N_a$, что

$$\sup[\,|x_1(t)|,\ |x_2(t)|, \ldots] < N_a$$

при любом $t \subset [0,\ a]$.

Точкой рассматриваемого здесь счетномерного пространства величин $t,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots$ будем называть любую совокупность чисел $(t_0, \overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n, \ldots)$, в которой $t_0 \geqslant 0$, а $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n, \ldots$ — вещественные или комплексные числа, удовлетворяющие неравенству:

$$\sup[\,|\overset{0}{x}_1|,\ |\overset{0}{x}_2|, \ldots,\ |\overset{0}{x}_n|, \ldots] < \infty.$$

Систему функций (3) будем называть решением системы уравнений (1), проходящим через точку $(t_0, \overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n, \ldots)$, если $x_1(t_0) = \overset{0}{x}_1$, $x_2(t_0) = \overset{0}{x}_2, \ldots, x_n(t_0) = \overset{0}{x}_n, \ldots$ и если $dx_s(t)/dt = p_{s1} x_1(t) + p_{s2} x_2(t) + \ldots + p_{sm} x_m(t) + \ldots$ $(s = 1, 2, \ldots)$ при всех значениях $t \geqslant 0$, причем, если система функций (3) ограничена, то это решение будем называть ограниченным.

Легко видеть, что через любую заданную точку $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots)$ проходит и лишь единственное ограниченное решение, причем ограниченное решение системы уравнений (1) будет и равностепенно непрерывным.

Пусть (3) есть ограниченное решение системы уравнений (1), проходящее через некоторую точку $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots)$. Рассмотрим функцию

$$x(t) = \sup [\, |x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots ]. \tag{4}$$

Имеем:

$$|\Delta x(t)| = |\sup[\, |x_1(t+\Delta t)|, |x_2(t+\Delta t)|, \ldots] - \\ - \sup[\, |x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots]\, | \leqslant \sup[\, |\Delta x_1|, |\Delta x_2|, \ldots], \tag{5}$$

где положено $\Delta x_s = x_s(t+\Delta t) - x_s(t)$ $(s=1, 2, \ldots)$.

Отсюда, на основании равностепенной непрерывности ограниченного решения системы уравнений (1), следует, что $x(t)$ есть непрерывная функция.

На основании (2) и (5) имеем:

$$|\Delta x(t)| \leqslant \left| \int_t^{t+\Delta t} p(\tau)\, x(\tau)\, d\tau \right|. \tag{6}$$

Пусть $t$ и $t+\Delta t$ принадлежат некоторому заданному сегменту $[a, b]$, $a \geqslant 0$. Положим $P = \max p(t)$, $\delta = \max\, x(t)$ на сегменте $[a, b]$. Тогда из (6) будем иметь:

$$|\Delta x(t)| \leqslant P\delta\, |\Delta t|\,.$$

Следовательно, на любом заданном сегменте функция $x(t)$ удовлетворяет условию Коши, т. е. функция $x(t)$ имеет почти всюду производную $x'(t)$, причем

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(t)\, dt,$$

где интеграл рассматривается в смысле Лебега.

На основании (6) имеем:

$$|x'(t)| \leqslant p(t)\, x(t). \tag{7}$$

Если $x(t_0) > 0$, то легко видеть, что $x(t) > 0$ и при любом $t \geqslant 0$. Тогда функция $v(t) = \lg x(t)$ будет на любом заданном сегменте $[a, b]$, $a \geqslant 0$, также удовлетворять условию Коши. Следовательно, у функции $v(t)$ существует почти всюду производная $v'(t)$, причем

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} v'(t)\, dt, \tag{8}$$

где интеграл рассматривается в смысле Лебега.

На основании (7) следует, что

$$|v'(t)| = \frac{|x'(t)|}{x(t)} \leqslant p(t). \tag{9}$$

На основании (8) и (9) имеем:

$$-\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt \leqslant \lg \frac{x(t)}{x(t_0)} \leqslant +\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt;$$

отсюда

$$x(t_0)\,e^{-\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt} \leqslant x(t) \leqslant x(t_0)\,e^{+\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt} \tag{10}$$

при любом $t \geqslant t_0$.

Если $x(t_0)=0$, то легко видеть, что $x(t)=0$ при любом $t \geqslant 0$, и тогда неравенство (10) становится тривиальным.

Отсюда следует

Теорема 1. *Любое ограниченное решение системы уравнений* (1) *удовлетворяет неравенству* (10) *при любом* $t \geqslant t_0$.

Пусть (3) есть ограниченное решение системы уравнений (1), проходящее через точку $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots)$. Характеристичным числом решения (3) назовем характеристичное число (в смысле Ляпунова [1]) функции $x(t)$, где $x(t)$ определена с помощью равенства (4).

Легко видеть, что если характеристичное число функции $x(t)$ положительно, то решение (3) стремится к нулю (равностепенно) при $t \to \infty$. Если характеристичное число функции $x(t)$ отрицательно, то решение (3) неограничено при $t \to \infty$.

Допустим, что $p(t)$ ограничена: $p(t) \leqslant a$ при любом $t \geqslant 0$. Тогда на основании теоремы 1 имеем:

$$x(t_0)\,e^{-a(t-t_0)} \leqslant x(t) \leqslant x(t_0)\,e^{a(t-t_0)}$$

при любом $t \geqslant t_0$.

Отсюда следует

Теорема 2. *Если функция* $p(t)$ *ограничена,* $p(t) \leqslant a$, *то любое ограниченное решение системы уравнений* (1) (*отличное от тривиального решения* $x_1 = x_2 = \ldots = 0$) *имеет конечное характеристичное число* $\rho$, *удовлетворяющее неравенству* $|\rho| \leqslant a$.

Заметим, что теорема 2 является распространением известной теоремы Ляпунова [1] на счетные системы (1).

Допустим, что система (1) имеет вид:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_4, \ldots \tag{11}$$

Легко видеть, что

$$x_s = c_s + c_{s+1}t + c_{s+2}\frac{t^2}{2!} + \ldots + c_{s+m}\frac{t^m}{m!} + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

есть решение системы (11), которое будет единственным ограниченным решением, проходящим через точку $(0, c_1, c_2, \ldots)$ (здесь, ради сокращения записи, полагаем $t_0 = 0$).

Пусть $c = \sup[\,|c_1|, |c_2|, \ldots]$, тогда на основании (10) будем иметь:

$$ce^{-t} \leqslant x(t) \leqslant ce^{t}$$

при любом $t \geqslant 0$. Следовательно, характеристичное число $\rho$ решения (12) удовлетворяет неравенству $|\rho| \leqslant 1$.

Пусть $r$ — любое комплексное число, удовлетворяющее неравенству $|r| \leqslant 1$. Легко видеть, что система функций

$$x_1 = re^{rt}, \quad x_2 = r^2e^{rt}, \quad x_3 = r^3e^{rt}, \ldots \tag{13}$$

есть решение системы (11), проходящее через точку $(0, r, r^2, \ldots)$, причем $\sup [\,|r|, |r^2|, \ldots] = |r| \leqslant 1$. Если положим $r = \alpha + i\beta$, то $\rho = -\alpha$ будет характеристичным числом решения (13). Отсюда следует, что множество характеристичных чисел ограниченных решений системы (11), есть сегмент $[-1, +1]$.

Заметим, что система (11) имеет и неограниченные решения. Действительно, пусть $f(t) = e^{-1/t^2}$ $(f(0) = 0)$.

Тогда система непрерывных функций

$$x_1 = e^{-1/t^2}, \quad x_2 = \frac{d}{dt} e^{-1/t^2}, \quad x_3 = \frac{d^2}{dt^2} e^{-1/t^2}, \ldots \tag{14}$$

есть решение системы (11), проходящее через точку $t=0, x_1 = x_2 = \ldots = 0$. Очевидно, что (14) не будет ограниченным решением.

Поступило
20 IX 1948

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача устойчивости движения, Харьков, 1892; ОНТИ, 1935.