результаты можно посмотреть, например, в статье И. Бакирташа "Контактные задачи для ортотропного и неоднородно-упругого полупространства". В настоящей работе, используя математический аппарат приведенной выше работы, рассматривается контактная задача для ортотропной неоднородно-упругой полосы.

Краевые условия для полосы записываются в виде

$$\sigma_y\big|_{y=0} = P\delta(x), \quad \tau_{xy}\big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{y=h} = 0, \quad \tau_{xy}\big|_{y=h} = 0.$$

где $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\partial\xi$ – дельта-функция Дирака; P – сосредоточенная сила.

В настоящей работе используются известные зависимости между деформациями и напряжениями, а неоднородность задается матрицей жесткости, элементы которой имеют вид

$$a_{ij} = H_{ij}e^{kx+ly},$$

где k и l – параметры неоднородности материала.

Известно, что напряжения легко определяются с помощью функции Эри следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

Функция $\Phi(x,y)$ (функция Эри) должна удовлетворять уравнению

$$H_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + H_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} + (2H_{12}+H_{66})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + 2kH_{22}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} + 2lH_{11}\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3} + (2kH_{12}+kH_{66})\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2} +$$

$$+ (2lH_{12}+lH_{66})\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y} + (k^2H_{22}+l^2H_{12})\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (k^2H_{12}+l^2H_{11})\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + klH_{66}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 0.$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$\Phi(x,y,k,l) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{4} c_n(\alpha)e^{t_n(\alpha)y - ix\alpha}\partial\alpha.$$

Учитывая зависимость между деформациями и напряжениями, найдем выражения для деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \left(H_{11}\sigma_x + H_{12}\sigma_y\right)e^{kx+ly}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \left(H_{21}\sigma_x + H_{22}\sigma_y\right)e^{kx+ly}.$$

После интегрирования этих выражений по x и y соответственно, получим формулы для нахождения перемещений U (по оси X) и V (по оси Y)

$$U = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\sum_{n=1}^{4} c_n(\alpha)\frac{H_{11}t_n(\alpha) - H_{12}\alpha^2}{k - i\alpha}e^{(t_n(\alpha\alpha + l)y + (k - i\alpha\alpha)}\partial\alpha + f,$$

$$V = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\sum_{n=1}^{4} c_n(\alpha)\frac{H_{21}t_n(\alpha) - H_{22}\alpha 2}{t_n(\alpha) + l}e^{(tn(\alpha t + l)y + (k - i\alpha\alpha)}\partial\alpha + g.$$

По указанной методике с использованием среды визуальной разработки приложений Borland Delphi 2.0 создано программное обеспечение. Проведены тестовые расчеты, которые согласуются с уже известными результатами для упругих однородных сред.

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

К. С. КУРОЧКА
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Аналитически краевые задачи нелинейной теории упругости решаются только в простейших случаях. Существует несколько приближенных аналитических и численных методов решения. В работе сделана попытка численными методами провести сравнительный анализ эффективности двух итерационных и одного двухпроходного методов с целью определения их точности и быстродействия. Эффективность методов оценивалась на решении ряда задач о действии силы на полуплоскость, вдавливании жесткого штампа в полуплоскость. Варьировались размеры активной зоны, штампа, величина и точки приложения силы, свойства полуплоскости и штампа. Рассматривались следующие методы.

Метод переменной жесткости. Данный метод является итерационным. На первой итерации решается упругая задача с модулем упругости E_0, соответствующим исходному состоянию элемента. Взяв за основу полученные в первом решении упругой задачи деформации, по нелинейному закону определяем соответствующую величину напряжения нелинейного элемента. Затем для каждого конечного элемента вместо имеющегося модуля упругости вводим секущий модуль упругости E_1. И снова решается линейная задача. Дальнейший процесс итерации продолжается аналогичным образом до достижения заданной точности. Таким образом, на каждом шаге итерации необходимо вновь составлять матрицу жесткости и решать систему линейных алгебраических уравнений, что требует значительных ресурсов ЭВМ. Для получения приемлемой точности, как правило, требуется совершить 8 - 10 итераций.

Метод начальных напряжений. Метод является итерационным. На первой итерации решается линейная задача, для каждого элемента определяется разность между истинными напряжениями при соответствующих деформациях и напряжениями, найденными из упругого решения. Эта разность напряжений затем перераспределяется в соответствии с упругим законом, чтобы восстановить равновесие. Итерации продолжаются до тех пор, пока данная разность не станет достаточно близкой к нулю. В этом методе на каждом шаге итерационного процесса используется одна и та же матрица жесткости, поэтому данный метод требует меньшее количество ресурсов ЭВМ, чем метод переменной жесткости. Но есть некоторые сложности при алгоритмизации метода, если нелинейный закон деформирования задан в интенсивностях. Решение указанной задачи привело к разработке очень простого алгоритма для данного случая. Метод начальных напряжений сходится быстрее метода переменной жесткости. При решении реальных задач требуется совершать 4 - 6 итераций.

Метод энергетической линеаризации. Данный метод является двухпроходным. Согласно методу энергетической линеаризации решение нелинейной краевой задачи при использовании метода конечных элементов сводится к решению линейной неоднородной задачи, для которой модуль упругости каждого конечного элемента определяется по формуле, полученной аналитически

$$\overline{E} = E\left[\frac{2A}{(1+m)E(\varepsilon_i)^{1-\mathrm{m}}}\right]^{\frac{1}{\mathrm{m}}}.$$

Данный метод требует наименьшего количества ресурсов ЭВМ. Решение получается за две итерации, расхождение с итерационными решениями не превышает 10 %.

Методы переменной жесткости и начальных напряжений малопригодны для решения практических задач, т. к. для получения приближенного решения требуется решать СЛАУ порядка 2000 уравнений для плоского случая и 6000 уравнений для трехмерного случая, а при более сложной конфигурации взаимодействующих тел и для получения большей точности количество уравнений может увеличиться в несколько раз. Даже учитывая специфический вид матрицы системы, решение СЛАУ требует большого количества счетного времени. А данную систему в этих методах приходится решать по 6 - 10 и более раз. Поэтому наиболее эффективным методом решения краевых задач нелинейной теории упругости является метод энергетической линеаризации – решение получается за 2 прохода.

Поставленная задача была реализована в среде Delphi 3.

ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА КАК ЭЛЕМЕНТА ОПТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

В. И. КОНДРАТЕНКО, М. И. ПАСТУХОВ, В. В. СЫТЬКО
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Широкое применение теории цепей, и в частности линейных, обусловлено практической ценностью при проектировании устройств радиоэлектроники ввиду простоты расчетов параметров прохождения информационного сигнала. Развитие оптического приборостроения в области оптических информационных систем позволяет сделать шаги для распространения теории цепей в сферу оптической обработки информации, где данный подход представляется перспективным ввиду обычно небольшого количества элементов оптических схем и ограниченности их вида. Основным поняти-