Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 2

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Академик В. П. НИКИТИН, В. К. ТУРКИН и Н. П. КУНИЦКИЙ

О НОМОГРАММАХ УСТОЙЧИВОСТИ

В ряде наших работ ([1–4]) были изложены методы построения диаграмм устойчивости, служащих для определения границ, между которыми заключен коэффициент затухания переходного процесса при заданных значениях параметров рассматриваемой динамической системы, а также диаграмм частоты колебания, позволяющих найти аналогичные границы для круговой частоты переходного процесса, и диаграмм правильности переходного процесса, дающих возможность исследовать, в какой мере затухание последнего отличается от затухания по простому экспоненциальному закону.

Как построение вышеперечисленных диаграмм, так и практическое использование их тем проще, чем меньшее число параметров содержат коэффициенты дифференциальных уравнений рассматриваемой динамической системы и чем ниже порядок этой системы. В случае системы более или менее высокого порядка, когда число коэффициентов характеристического уравнения соответственно велико, приходится либо ограничиться рассмотрением вопроса в предположении, что все эти коэффициенты могут быть выражены через сравнительно небольшое число параметров, либо производить перед построением диаграммы приведение характеристического уравнения к виду, содержащему по возможности малое число буквенных коэффициентов (для подобного рода приведения можно пользоваться, например, преобразованием Чирнгаузена). Последний путь представляется, вообще говоря, мало желательным: в то время как в исходном алгебраическом уравнении коэффициенты имеют обычно более или менее простой физический смысл, в преобразованном уравнении этого может и не быть.

Вышеизложенные соображения приводят к выводу, что в случае системы сравнительно высокого порядка с характеристическим уравнением, коэффициенты которого зависят от более или менее значительного числа параметров, диаграммы устойчивости (а также диаграммы частоты колебания и диаграммы правильности переходного процесса) целесообразно заменить соответствующими номограммами.

При построении номограмм устойчивости (как и при построении соответствующих диаграмм) дело состоит в том, чтобы иметь возможность проверять путем простого графического построения, выполняются ли для рассматриваемого алгебраического уравнения (являющегося характеристическим уравнением интересующей нас системы дифференциальных уравнений) условия Гурвица.

Пусть рассматриваемое нами характеристическое уравнение имеет вид

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0. \qquad (1)$$

Как и при построении диаграмм устойчивости, следует путем замены неизвестного по возможности уменьшить число буквенных коэффициентов в этом уравнении, заботясь, однако, о том, чтобы в преобразованном уравнении буквенные коэффициенты достаточно просто выражались через буквенные коэффициенты исходного уравнения или же через параметры рассматриваемой динамической системы.

Пусть

$$u^n + b_1 u^{n-1} + b_2 u^{n-2} + \ldots + b_{n-1} u + b_n = 0 \qquad (2)$$

уравнение, к которому приведено уравнение (1). Произведя в уравнении (2) замену

$$u = v + q,$$

получим уравнение вида

$$v^n + c_1(b_1, q)\, v^{n-1} + c_2(b_1, b_2, q)\, v^{n-2} + \ldots + c_n(b_1, b_2, \ldots, b_n, q) = 0. \qquad (3)$$

Напишем для этого уравнения условия Гурвица; они будут иметь вид:

$$A_i(b_1, b_2, \ldots, b_n, q) > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Если при некоторых (действительных) значениях величин

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, q \qquad (5)$$

все неравенства (4) выполняются, то при этих значениях величин (5) действительные части всех корней уравнения (3) отрицательны и, следовательно, действительные части всех корней уравнения (2) удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}(u) < q. \qquad (6)$$

Предположим для простоты, что зависимость, связывающая z и u, является линейной (с действительными коэффициентами):

$$z = \alpha u + \beta; \qquad (7)$$

этот случай представляет наибольший практический интерес, так как при преобразованиях более сложного вида вычисление коэффициентов уравнения (2) по коэффициентам уравнения (1) потребует более или менее громоздких вычислений.

Если $\alpha > 0$, то из (6) и (7) вытекает, что действительные части всех корней уравнения (1) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}(z) < p = \alpha q + \beta,$$

так что коэффициент затухания переходного процесса λ удовлетворяет неравенству

$$\lambda > -p$$

(мы считаем коэффициент затухания положительным в том случае, когда переходной процесс действительно затухает, и отрицательным в противоположном случае).

Если же $\alpha < 0$, то из (6) и (7) вытекает, что действительные части всех корней уравнения (1) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}(z) > p = \alpha q + \beta$$

и, следовательно,

$$\lambda < -p.$$

Из вышеизложенного вытекает, что построение номограммы устойчивости связано с номографированием уравнений

$$A_i(b_1, b_2, \ldots, b_n, q) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Подобного рода номограмма должна иметь функциональные шкалы (обычные или обобщенные) для величин (5), причем вместо шкал для величин

$$b_1, b_2, \ldots, b_n \tag{9}$$

могут быть построены шкалы для каких-либо параметров, через которые оказывается целесообразным выразить величины (9). Если какая-либо из величин (9) имеет численное, а не буквенное значение, то соответствующая шкала, очевидно, отпадает.

Пусть заданы какие-либо действительные значения величин (9) (или параметров, через которые эти величины выражены). Каждое из уравнений (8) даст тогда некоторое соответствующее значение q, причем значения эти, вообще говоря, различны. Поэтому на номограмме целесообразно иметь несколько (сколько именно, зависит от вида уравнений (8)) шкал для величин q. Отметим на каждой из этих шкал значения q (вообще говоря, этих значений может оказаться несколько на каждой шкале), соответствующие выбранным нами значениям величин (9).

Пусть $\alpha > 0$ и Q есть наименьшее число, обладающее тем свойством, что на каждой из функциональных шкал для величины q одно из значений (соответствующих заданным нами значениям величин (9)) не меньше Q; тогда коэффициентом затухания (или возрастания) переходного процесса рассматриваемой динамической системы можно считать величину

$$\Lambda = -(\alpha Q + \beta).$$

Разумеется, номограмма описанного типа может служить также для определения значения какого-либо из коэффициентов b_i по значениям остальных из этих коэффициентов и значению коэффициента затухания.

Дополнительное исследование может понадобиться в случае, когда заданные значения величин (9) и полученное значение величины q дают экстремум одной из функций $A_i(b_1, b_2, \ldots, b_n, q)$. Однако такой случай не может представлять практического интереса.

Возможен случай, когда некоторые из уравнений (8) содержат только неизвестное q. Для подобного рода уравнений шкалы величины q отпадают. Значения q, получаемые из этих уравнений, служат для определения крайних значений q на прочих шкалах.

В качестве примера рассмотрим систему третьего порядка, для которой характеристическое уравнение имеет вид

$$z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0. \tag{10}$$

Для уменьшения числа буквенных коэффициентов проделываем замену

$$z = a_1 u,$$

после чего уравнение (10) приводится к виду

$$u^3+u^2+xu+y=0;$$

значения коэффициентов x и y легко вычислить по значениям коэффициентов a_1, a_2, a_3.

Уравнение (3) будет иметь в рассматриваемом случае вид

$$v^3+(3q+1)v^2+(3q^2+2q+x)v+q^3+q^2+qx+y=0. \quad (11)$$

Условия Гурвица для уравнения (11) имеют вид:

1) $3q+1>0$,
2) $(3q+1)(3q^2+2q+x)-(q^3+q^2+qx+y)>0$,
3) $q^3+q^2+qx+y>0$,

так что уравнения (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} &1)\ 3q+1=0,\\ &2)\ 8q^3+8q^2+2q+(2q+1)x-y=0,\\ &3)\ q^3+q^2+qx+y=0. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, номограмма устойчивости в данном случае будет состоять из шкалы для величины x, шкалы для величины y и двух шкал для величины q. На одной из шкал для q значения этой величины наносятся при помощи второго из уравнений (12); на другой — при помощи третьего из уравнений (12). Значения q на этих двух шкалах следует брать удовлетворяющие условию

$$q>-1/3.$$

Поступило
17 IX 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1567 (1946). [2] В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, ДАН, 58, № 4 (1947). [3] В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, ДАН, 59, № 1 (1948). [4] В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, ДАН, 59, № 6 (1948).