Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ КОМПЛЕКСНОЙ ПОЛУПРОСТОЙ ГРУППЫ ЛИ И ЕЕ МАКСИМАЛЬНОЙ КОМПАКТНОЙ ПОДГРУППЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 IX 1948)

Неприводимое унитарное представление комплексной полупростой группы Ли $\mathfrak{G}$ можно рассматривать как представление ее максимальной компактной подгруппы $\mathfrak{U}$. При этом оно разлагается на конечномерные представления группы $\mathfrak{U}$. Связь между представлениями группы $\mathfrak{G}$ и подгруппы $\mathfrak{U}$ и изучается в настоящей работе. Мы будем проводить рассуждение для случая, когда $\mathfrak{G}$ — комплексная унимодулярная группа, а $\mathfrak{U}$ — ее подгруппа унитарных матриц, и будем указывать, как формулируется результат в общем случае. При этом мы используем обозначения и результаты (²).

§ 1. Унитарная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех унитарных матриц u из комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$, а через Γ — совокупность всех диагональных матриц из $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

I. *Каждую матрицу $g \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде $g = ku$, где $k \in K$ и $u \in \mathfrak{U}$.*

Если $g = k_1 u_1$ и $g = k_2 u_2$, то $u_2 = \gamma u_1$ при некотором $\gamma \in \Gamma$; поэтому равенство $g = ku$ определяет матрицу u с точностью до произвольного левого множителя $\gamma \in \Gamma$.

Это означает, что:

II. *В каждом правом классе смежности $\tilde{z}$ группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K содержится один и только один правый класс смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе Γ.*

Будем обозначать через $\tilde{u}$ правые классы смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе Γ, а через $\tilde{\mathfrak{U}}$ — совокупность всех этих классов. В силу предложения II мы можем отождествить каждый класс $\tilde{z}$ с содержащимся в нем классом $\tilde{u}$, следовательно, пространство $\tilde{Z}$ с пространством $\tilde{\mathfrak{U}}$. Преобразование $\tilde{z}' = \tilde{z}\, g$ можно тогда рассматривать как преобразование $\tilde{u}' = \tilde{u}\, g$ соответствующих классов $\tilde{u}$.

§ 2. Интегральные соотношения. В пространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$ существует мера $d\mu(\tilde{u})$, инвариантная по отношению к преобразованию $\tilde{u} \to \tilde{u}\, u_0$, причем при надлежащей нормировке инвариантных мер $d\mu(u)$, $d\mu(\tilde{u})$, $d\mu(\gamma)$, $d\mu(g)$, $d\mu_l(k)$:

$$\int f(u)\,d\mu(u)=\int d\mu(\tilde{u})\int f(\gamma u)\,d\mu(\gamma);\quad \int x(g)\,d\mu(g)=\int d\mu(\tilde{u})\int x(ku)\,d\mu_l(k); \tag{1}$$

$$\int f(\tilde{u})\,d\mu(\tilde{u})=\int f(\widetilde{u\bar{g}})\frac{\beta(\tilde{u}\bar{g})}{\beta(ug)}\,d\mu(\tilde{u}),\ \text{т. е.}\ \frac{d\mu(\tilde{u}\bar{g})}{d\mu(\tilde{u})}=\frac{\beta(\tilde{u}\bar{g})}{\beta(ug)}. \tag{2}$$

Если $f(\gamma u)=f(u)$, то можно положить $f(u)=f(\tilde{u})$. (В дальнейшем мы без всяких оговорок не будем делать различия между такой функцией $f(u)$ и $f(\tilde{u})$.) Из (1) тогда получаем, что при $\int d\mu(\gamma)=1$

$$\int f(u)\,d\mu(u)=\int f(\tilde{u})\,d\mu(\tilde{u});$$

следовательно,

$$\int x(g)\,d\mu(g)=\int d\mu(u)\int x(ku)\,d\mu_l(k). \tag{3}$$

Эти результаты остаются справедливыми также в случае произвольной комплексной полупростой группы $\mathfrak{G}$. При этом роль подгруппы K играет подгруппа, порожденная положительными корневыми векторами инфинитезимальной группы группы $\mathfrak{G}$, роль группы $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа, а группы D — максимальная коммутативная подгруппа Ли группы $\mathfrak{G}$, содержащая регулярный элемент. Наконец, $\Gamma=\mathfrak{U}\cap D$ и $\beta(k)=d\mu_l(k)/d\mu_r(k)$.

§ 3. Основная невырожденная серия неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$. Основная невырожденная серия неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$ была описана авторами в ([2]). Здесь дается другое ее описание.

Пусть $\mathfrak{H}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ — совокупность всех функций $f(\tilde{u})$ таких, что $\|f\|^2=\int|f(\tilde{u})|^2\,d\mu(\tilde{u})=\int|f(u)|^2\,d\mu(u)$, где $f(\gamma u)=f(u)=f(\tilde{u})$ (см. § 2). Тогда $\mathfrak{H}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ — гильбертово пространство.

Будем искать представление $g\to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ в виде

$$U_g f(u)=\alpha(u,\,g)\,f(u\bar{g}), \tag{4}$$

где функция $\alpha(u,g)$ удовлетворяет соотношению $\alpha(\gamma u,g)=\alpha(u,g)$, а $u\bar{g}$ — любой элемент класса $\tilde{u}\bar{g}$ (какой — безразлично, ибо по условию $f(\gamma u)=f(u)$). Из равенства $U_{g_1}U_{g_2}=U_{g_1g_2}$ следует, что

$$\alpha(u,\,g_1)\,\alpha(u\bar{g}_1,\,g_2)=\alpha(u,\,g_1g_2). \tag{5}$$

Отсюда и из условия унитарности оператора U_g в силу (2) следует, что

$$U_g f(u)=\frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)}f(u\bar{g}), \tag{6}$$

где

$$\alpha(\zeta\delta u)=\alpha(\delta)\,\alpha(u),\quad \alpha(\delta)=\beta^{-1/2}(\delta)\,\chi(\delta), \tag{7}$$

и $\chi(\delta)$ — характер группы D; его можно записать в виде

$$\chi(\delta)=|\lambda_2|^{m_2+i\rho_2}\lambda_2^{-m_2}|\lambda_3|^{m_3+i\rho_3}\lambda_3^{-m_3}\dots|\lambda_n|^{m_n+i\rho_n}\lambda_n^{-m_n} \tag{8}$$

(m_p — целые, ρ_p — произвольные действительные числа).

Отметим, что умножение функций $f(\tilde{u})$ на функцию $\omega(\tilde{u})$, по модулю равную единице, не изменяет нормы $\|f\|$ и переводит функцию $\alpha(u)$ в $\alpha(u)/\omega(\tilde{u})$.

Следовательно, *функция* $\alpha(u)$ *определена данным представлением с точностью до множителя* $\omega(\tilde{u})$, *по модулю равного единице.*

Если $g=\zeta\delta u$, то $gg^*=\zeta\delta\delta^*\zeta^*$; так как $\zeta^*\in Z$, то, согласно формуле (2, 13) в ([2]),

$$|\lambda_p|^2=\Delta_p/\Delta_{p+1}, \quad p=1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

где Δ_p — минор матрицы gg^*, составленный из ее последних $n-p+1$ строк и столбцов, и $\Delta_{n+1}=1$. Аргументы же чисел λ_p вообще не определены в силу соотношения $g=\zeta\delta u=\zeta\delta\gamma\cdot\gamma^{-1}u$.

В случае произвольной полупростой группы $\mathfrak{G}$ основная невырожденная серия также задается формулами (6) и (7), с той же интерпретацией рассматриваемых подгрупп и функции $\beta(k)$, которая была указана в конце § 2. При этом $\chi(\delta)$ попрежнему обозначает характер группы D.

Формулы (6) и (7) описывают также и дополнительную невырожденную серию представлений, если, не требуя выполнения условия $|\chi(\delta)|=1$, надлежащим образом определить функцию $\chi(\delta)$, и метрику в пространстве функций $f(\tilde{u})$.

§ 4. Сферические функции.

Теорема 1. *Пусть U_g — представление невырожденной серии группы $\mathfrak{G}$, соответствующее характеру $\chi(\delta)$. Для того чтобы в пространстве этого представления существовал вектор, инвариантный по отношению ко всем представлениям U_u, $u\in\mathfrak{U}$, необходимо и достаточно, чтобы $\chi(\gamma)=1$, т. е. чтобы $m_2=m_3=\ldots=m_n=0$. При выполнении этого условия существует с точностью до постоянного множителя только один такой вектор.*

Действительно, в силу (6) такой вектор $f_0(u)$ удовлетворяет условию $\frac{\alpha(uu_0)}{\alpha(u)}f_0(uu_0)=f_0(u)$, т. е. $\alpha(uu_0)f_0(uu_0)=\alpha(u)f_0(u)$. Следовательно, $\alpha(u)f_0(u)=C$, где C — константа; $f_0(u)=C\alpha^{-1}(u)$. Так как $f_0(\gamma u)=f_0(u)$, то отсюда следует, что и $\alpha(\gamma u)=\alpha(u)$, т. е. $\alpha(\gamma)\alpha(u)=\alpha(u)$. Таким образом, $\chi(\gamma)=\alpha(\gamma)=1$; $f_0(u)=C\alpha^{-1}(u)$, и теорема полностью доказана.

При выполнении условия $\alpha(\gamma)=1$ мы имеем: $\alpha(u)=\alpha(\tilde{u})$.

Так как $|\alpha(\tilde{u})|=1$, то, полагая $\omega(\tilde{u})=\alpha(\tilde{u})$ (ср. конец § 3), мы получим, что можно считать $\alpha(u)=1$ и $f_0(u)\equiv 1$. При надлежащей нормировке $d\mu(\tilde{u})$ функция $f_0(u)\equiv 1$ будет нормированным вектором, инвариантным относительно U_u.

Положим

$$\varphi(g)=(U_g f_0, f_0); \tag{10}$$

так как U_g — неприводимое представление, то $\varphi(g)$ — элементарная, положительно-определенная функция (см. ([3])); в силу определения f_0 функция $\varphi(g)$ постоянна на двусторонних классах смежности по $\mathfrak{U}$: $\varphi(ug)=\varphi(gu)=\varphi(g)$.

Функция $\varphi(g)$ называется сферической функцией данного представления U_g.

Всякую матрицу g можно представить в виде $g=u_1\delta u_2$, где δ — диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Поэтому достаточно найти $\varphi(\delta)$. Из формул (10), (1,7) в ([2]), (6), (7), (8) и (9) § 3 и равенств $f_0\equiv 1$, $m_2=m_3=\ldots=m_n=0$ следует, что в случае представления основной невырожденной серии

$$\varphi(\delta)=\int\alpha(u\delta)\,d\mu(u)=\int\Delta_2^{i\frac{\rho_2}{2}-1}\Delta_3^{i\frac{\rho_3-\rho_2}{2}-1}\ldots\Delta_n^{i\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{2}-1}d\mu(u), \tag{11}$$

где Δ_p — минор матрицы $u\delta^2 u^*$, составленный из ее последних $n-p+1$ строк и столбцов.

Вычисляя интеграл в (11), приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Если U_g — представление основной невырожденной серии группы $\mathfrak{G}$, отвечающее характеру $\chi(\delta) = |\lambda_2|^{i\rho_2} |\lambda_3|^{i\rho_3} \ldots |\lambda_n|^{i\rho_n}$, то соответствующая сферическая функция определяется формулой*:

$$\varphi(\delta) = \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\prod\limits_{1 \leqslant p < q \leqslant n} (\rho_q - \rho_p)(\lambda_q^2 - \lambda_p^2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{i\rho_1} & \lambda_2^{i\rho_1} & \ldots & \lambda_n^{i\rho_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{i\rho_n} & \lambda_2^{i\rho_n} & \ldots & \lambda_n^{i\rho_n} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Теорема 1 переносится без всяких изменений на представления основной невырожденной серии произвольной комплексной полупростой группы. При этом для сферических функций имеет место аналогичная формула:

$$\varphi(\delta) = c \frac{\sum\limits_s \pm \chi(\delta_s)}{\sum\limits_s \pm \beta^{-1/2}(\delta_s)},$$

где δ_s означает результат применения автоморфизма s группы S к элементу группы D. Знак $\pm$ определяется в зависимости от четности или нечетности элемента s, а численный множитель c определяется из условия $\varphi(e) = 1$.

§ 5. Разложение по представлениям унитарной подгруппы. Следующая теорема является обобщением теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть U_g — представление невырожденной серии группы $\mathfrak{G}$, соответствующее характеру $\chi(\delta)$. Для того чтобы полученное из него представление U_u унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$ содержало данное неприводимое представление $c(u)$ этой подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве представления $c(u)$ содержался весовой вектор этого представления веса $\chi(\gamma)$. Представление $c(u)$ содержится в представлении U_u столько раз, сколько есть линейно независимых весовых векторов представления $c(u)$ веса $\chi(\gamma)$.*

Теорема 3 также остается верной для представлений невырожденной серии произвольной комплексной полупростой группы.

Из теоремы 3 следует, что в разложении представления U_u представление $c(u)$ с наинизшим старшим весом встречается только один раз, и этот вес есть $\chi(\gamma)$.

Поступило
28 IX 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 411 (1947). [2] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Матем. сб., **21** (63):3, 405, (1947). [3] И. М. Гельфанд и Д. А. Райков, Матем. сб., **13** (55), 301 (1943). [4] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, 1940.