Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. БОКШТЕЙН

О РАЗМЕРНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 X 1948)

В настоящей заметке дается окончательный результат моих исследований относительно гомологической размерности топологического произведения двух бикомпактов.

Предварительные результаты этих исследований, приведенные в конце моей статьи о группах и кольцах гомологий для топологического произведения ([3]), содержат существенную неточность и нуждаются в исправлении *. Это непосредственно следует из построенного В. Г. Болтянским ([6]) примера компакта размерности 2, топологический квадрат которого имеет размерность 3, тогда как в силу этих результатов он был бы четырехмерным**.

Оказывается, что для вычисления гомологической (а потому и урысоновско-броуэровской) размерности топологического произведения действительно достаточно задать значения ∇-размерности для обоих сомножителей по всем полям коэффициентов из полной системы R, R_p, C_p, Q_p ([2]), но формулировка соответствующей теоремы статьи ([3]) должна быть изменена следующим образом:

Теорема. *∇-размерность топологического произведения двух бикомпактов A и B по каждому из полей коэффициентов R и C_p равна сумме значений ∇-размерности по этому полю коэффициентов для сомножителей, а для ∇-размерности по полям коэффициентов R_p и Q_p имеем:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}_{R_p}(A\times B) = \min\{&\max(\operatorname{Dim}_R A+\operatorname{Dim}_R B,\\ &\quad \operatorname{Dim}_{C_p} A+\operatorname{Dim}_{C_p} B,\ \operatorname{Dim}_{Q_p} A+\operatorname{Dim}_{Q_p} B+1),\\ &\max(\operatorname{Dim}_R A+\operatorname{Dim}_R B,\ \operatorname{Dim}_{C_p} A+\operatorname{Dim}_{C_p} B,\\ &\quad \operatorname{Dim}_{R_p} A+\operatorname{Dim}_{Q_p} B,\ \operatorname{Dim}_{Q_p} A+\operatorname{Dim}_{R_p} B)\};\end{aligned}$$

$$\operatorname{Dim}_{Q_p}(A\times B) = \max(\operatorname{Dim}_{Q_p} A+\operatorname{Dim}_{Q_p} B,\ \operatorname{Dim}_{C_p} A+\operatorname{Dim}_{C_p} B-1)$$

---

* Следует кстати заметить, что незначительная неточность имеется и в первой части этой работы ([3]) — именно, при построении ∇-групп топологического произведения указаны не все соотношения между образующими этих групп (что, однако, никак не влияет на правильность самой доказываемой там теоремы).

** Ибо ∇-размерности по полям коэффициентов R и R_p, а потому и урысоновская размерность, являющаяся, согласно ([2]), максимальной из них, должны были бы, по ([3]), при взятии топологического квадрата удвоиться.

($\mathrm{Dim}_G A$ обозначает ∇-размерность пространства A по полю коэффициентов G) *.

Прежде всего вводятся новые числовые инварианты, из знания которых, с одной стороны, можно вычислить ∇-размерность бикомпакта по любому из полей коэффициентов R, R_p, C_p, Q_p, и которые, с другой стороны, образуют систему, замкнутую относительно действия топологического перемножения пространств, т. е. такую, что значения этих числовых инвариантов для топологического произведения двух бикомпактов определяются их значениями для сомножителей **.

Эти новые инварианты, образующие счетную систему чисел, распадающихся на 4 сорта: $D_0(A)$, $d_p(A)$, $\Delta_p(A)$, $\delta_p(A)$ (где индекс p пробегает по всем простым числам), будут определены следующим образом.

$D_0(A)$ есть наибольшее число q такое, что существует подмножество A' типа G_ρ бикомпакта A, q-мерная ∇-группа которого по целочисленному полю коэффициентов содержит элемент бесконечного порядка; $d_p(A)$ есть наибольшее число q такое, что в A найдется подмножество A' типа G_ρ, q-мерная целочисленная ∇-группа которого содержит элемент бесконечного порядка, с точностью до элементов конечного порядка не делящийся на простое число p (т. е. который не может быть представлен как сумма элемента конечного порядка и элемента, являющегося p-кратным другого элемента); $\Delta_p(A)$ есть наибольшее число q такое, что в A найдется подмножество A' типа G_ρ, q-мерная ∇-группа которого по модулю p содержит элемент, не являющийся проекцией π_p^0 (в смысле статьи ([1])) от элемента целочисленной ∇-группы; наконец, $\delta_p(A)$ есть наибольшее число q, для которого найдется такое $A' \subseteq A$ типа G_ρ и такое натуральное число m, что q-мерная ∇-группа A' по модулю m содержит элемент, не являющийся проекцией π_m^{mp} какого-нибудь элемента q-мерной ∇-группы A' по модулю mp. При этом подпространство A' пространства A называется подпространством типа G_ρ, если оно является разностью двух открытых в A множеств (или, что то же, разностью двух замкнутых в A множеств, или же пересечением открытого и замкнутого в A множества). Очевидно, что $D_0(A) \geqslant d_p(A)$, $\nabla_p(A) \geqslant \delta_p(A)$.

∇-гомологическая размерность бикомпакта A по полям коэффициентов R, R_p, C_p, Q_p полной системы выражается через инварианты $D_0(A)$, $d_p(A)$, $\nabla_p(A)$, $\delta_p(A)$ по формулам:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dim}_R A = D_0(A),\\
&\mathrm{Dim}_{R_p} A = \max(D_0(A),\ \Delta_p(A)+1),\\
&\mathrm{Dim}_{C_p} A = \max(d_p(A),\ \Delta_p(A),\ \delta_p(A)+1),\\
&\mathrm{Dim}_{Q_p} A = \max(d_p(A),\ \Delta_p(A)).
\end{aligned}$$

При топологическом перемножении двух бикомпактов A и B введенные числовые инварианты ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned}
&D_0(A\times B) = D_0(A) + D_0(B),\\
&d_p(A\times B) = d_p(A) + d_p(B),
\end{aligned}$$

---

* Таким образом, аддитивность ∇-размерности при топологическом перемножении имеет место, в отличие от сказанного в ([3]), не для полей коэффициентов R, R_p и C_p, а лишь для R и C_p (но не для R_p и Q_p).

** Тезисы этой части настоящей работы были опубликованы в ([5]).

$$\Delta_p(A\times B)=\max(\Delta_p(A)+\Delta_p(B),\ d_p(A)+\Delta_p(B),$$
$$\Delta_p(A)+d_p(B),\ \delta_p(A)+\delta_p(B)+1),$$
$$\delta_p(A\times B)=\max(\delta_p(A)+\delta_p(B)+1,\ \Delta_p(A)+\delta_p(B),$$
$$\delta_p(A)+\Delta_p(B),\ d_p(A)+\delta_p(B),\ \delta_p(A)+d_p(B)).$$

Сформулированная в начале настоящей статьи теорема является непосредственным следствием этих предложений. Доказываются они при помощи результатов и методов моих работ ([1-3]) (используется также результат статьи ([4])).

Поступило
29 IX 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Бокштейн, ДАН, **37**, № 9 (1942). [2] М. Бокштейн, ДАН, **38**, № 7 (1943). [3] М. Бокштейн, ДАН, **40**, № 9 (1943). [4] М. Бокштейн, ДАН, **59**, № 4 (1948). [5] М. Бокштейн, 4-я научно-техн. конф. Моск. авиац.-технолог. ин-та (тезисы докладов), стр. 100 (1948). [6] В. Г. Болтянский, Усп. мат. наук, **3**, в. 5 (27), 159 (1948) (резюме доклада на Моск. матем. об-ве от 11 V 1948).