Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. В. СВИРСКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО НЕКОТОРЫМ СВОЙСТВАМ ПРЯМЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 IX 1948)

В этой статье решается следующий вопрос: дано, что некоторый самосопряженный линейный оператор H в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ имеет обратный оператор H^{-1}, норма которого меньше числа n, т. е.

$$Hf = g;\quad f = H^{-1}g;\quad |H^{-1}g| \leqslant n|g| \text{ при } g \in \mathfrak{H}.$$

В какой области операторов находится оператор, обратный H, если известно, что оператор H переводит данные элементы f_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ в данные элементы g_i, т. е.

$$Hf_i = g_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Для решения этого вопроса предварительно решим следующую задачу.

Дан линейный эрмитов замкнутый ограниченный оператор A, определенный на некотором подпространстве $D(A) \in \mathfrak{H}$ и на этом подпространстве неотрицательный, т. е. $(Af, f) \geqslant 0$, $f \in D(A)$. Требуется найти всевозможные самосопряженные неотрицательные расширения оператора A, т. е. найти все те расширения области определения оператора A, при которых он остается эрмитовым и неотрицательным.

Пусть оператору A соответствует матрица:

$$A = \left|\begin{array}{c|c} A_0 & \\ \hline B & \end{array}\right|.$$

Правая половина матрицы не имеет элементов. Оператор A_0 неотрицателен, так как $(A_0 f, f) f \in D(A)$.

Введем оператор над элементами из $D(A)$:

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon E,\quad \varepsilon > 0; \qquad D(A_\varepsilon) = D(A).$$

Всякое неотрицательное самосопряженное расширение оператора A_ε должно в матричной форме иметь следующий вид:

$$\tilde{A}_\varepsilon = \left|\begin{array}{c|c} A_{0\varepsilon} & B^* \\ \hline B & X \end{array}\right| : D(\tilde{A}_\varepsilon) = \mathfrak{H}. \tag{1}$$

При этом введено обозначение:

$$A_{0\varepsilon} = A_0 + \varepsilon E; \qquad D(A_{0\varepsilon}) = D(A_0).$$

Для неотрицательности расширения необходима и достаточна неотрицательность квадратичной формы:

$$(\tilde{A}_\varepsilon h, h) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad h \in D(\tilde{A}) = \mathfrak{H}. \tag{2}$$

Вектор h разложим на два составляющих вектора: один, лежащий в подпространстве $D(A_\varepsilon)$; другой — в его ортогональном дополнении:

$$h = f + g, \quad \text{где} \quad f \in D(A_\varepsilon), \quad g \in \mathfrak{H} \ominus D(A_\varepsilon).$$

Используя (1), получаем неравенство (2) в следующем виде:

$$(\tilde{A}_\varepsilon h, h) = (\tilde{A}_\varepsilon [f + g], [f + g]) =$$
$$= (A_{0\varepsilon} f, f) + (Bf, g) + (B^* g, f) + (X_\varepsilon g, g) \geqslant 0. \tag{3}$$

Пользуясь тем, что оператор $A_{0\varepsilon}$, переводящий элементы из $D(A)$ внутрь подпространства $D(A)$, является по его построению положительным оператором, который вследствие этого имеет обратный оператор, предыдущее неравенство можно преобразовать следующим образом:

$$(\tilde{A}_\varepsilon h, h) =$$
$$= (A_{0\varepsilon} [f + A_{0\varepsilon}^{-1} B_g^*], [f + A_{0\varepsilon}^{-1} B^* g]) + ([- B A_{0\varepsilon}^{-1} B^* + X_\varepsilon^*] g, g) \geqslant 0. \tag{3'}$$

Действительно, правую часть равенства можно, раскрыв скобки, представить так:

$$(A_{0\varepsilon} f, f) + (A_{0\varepsilon} f, A_{0\varepsilon}^{-1} B^* g) + (A_{0\varepsilon} A_{0\varepsilon}^{-1} B^* g, f) +$$
$$+ (A_{0\varepsilon} A_{0\varepsilon}^{-1} B^* g, A_{0\varepsilon}^{-1} B^* g) - (B A_{0\varepsilon}^{-1} B^* g, g) + (X_\varepsilon g, g).$$

Пользуясь эрмитовостью оператора $A_{0\varepsilon}$, легко установить равенство этой величины с величиной, указываемой формулой (3).

Необходимым и достаточным условием того, чтобы при любом $f \in D(A)$, $g \in \mathfrak{H} \ominus D(A)$ соблюдалось неравенство (3'), является неотрицательность третьей квадратичной формы, входящей в наше неравенство:

$$([- B A_{0\varepsilon}^{-1} B^* + X_\varepsilon] g, g) \geqslant 0, \tag{4}$$

так как вторую форму, входящую в неравенство, можно обратить в нуль, полагая $f = - A_{0\varepsilon}^{-1} B^* g$, т. е. оператор $[- B A_{0\varepsilon}^{-1} B^* + X_\varepsilon]$, в дальнейшем обозначаемый буквой C_ε, для этого должен быть неотрицательным.

Общий вид матрицы X_ε будет $X_\varepsilon = B A_{0\varepsilon}^{-1} B^* + C_\varepsilon$, где C_ε — любая неотрицательная матрица. Это можно кратко записать

$$X_\varepsilon \geqslant B A_{0\varepsilon}^{-1} B^*.$$

Этим самым задача о расширении оператора A_ε решена. Общий вид расширения оператора A в матричной форме имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} A_0 & B^* \\ B & X \end{Vmatrix},$$

где оператор X определяется формулой

$$Xg = \lim_{\varepsilon \to 0} X_\varepsilon g = \lim_{\varepsilon \to 0} BA_{0\varepsilon} B^* g + Cg;$$

при этом C — произвольный неотрицательный самосопряженный оператор.

Если предел существует не для всех элементов гильбертова пространства, то область определения оператора A можно расширить лишь на те элементы g, для которых предел существует. При доказательстве этого предложения следует воспользоваться тем соображением, что при устремлении ε к нулю квадратичная форма $(BA_{0\varepsilon}^{-1} B^* g, g)$ монотонно возрастает, а также тем, что эрмитов оператор однозначно определяется соответствующей ему квадратичной формой. В краткой записи предыдущее соотношение будем записывать так:

$$X \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} BA_{0\varepsilon} B^*.$$

Примечание. Предыдущий результат нетрудно распространить на случай, когда исходный оператор неограничен, а соответствующий оператор A_0 является самосопряженным в подпространстве $\overline{D}(A_0)$.

Случай, когда оператор A_0 может не быть самосопряженным, разобран в работе М. Г. Крейна (1) другими методами.

Теперь решим поставленный в начале статьи вопрос.

Согласно условиям задачи,

$$Hf_i = g_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно,

$$H^{-1} g_i = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Обозначим через A линейный оператор, определенный на линейном подпространстве $D(A)$, построенном на векторах g_i с помощью равенств

$$Ag_i = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда оператор H^{-1} должен находиться среди всех тех расширений $\tilde{A}$ оператора A, которые имеют норму, равную или меньшую n:

$$|\tilde{A}| \leqslant n. \tag{5}$$

Пусть матрица оператора A имеет вид:

$$\left|\begin{array}{c|c} A & \\ \hline B & \end{array}\right|.$$

Тогда матрица оператора $\tilde{A}$ должна иметь вид:

$$\tilde{A} = \left|\begin{array}{c|c} A & B^* \\ \hline B & X \end{array}\right|.$$

Необходимым и достаточным условием выполнения неравенства (5) является неравенство

$$|(Af, f)| \leqslant n(f, f),$$

т. е.

$$-n(f, f) \leqslant (\tilde{A} f, f) \leqslant n(f, f); \quad f \in \mathfrak{H}.$$

Эти условия можно выразить следующим образом:

$$([nE - A] f, f) \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad nE - A \geqslant 0;$$
$$([nE + A] f, f) \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad nE + A \geqslant 0,$$

где E — единичный оператор, т. е. операторы $(nE - A)$ и $(nE + A)$ должны быть неотрицательными. Применяя предыдущие рассуждения к операторам $(nE_1 - A)$ и $(nE_1 + A)$, получим неравенства:

$$nE_1 - X \geqslant B(nE_1 - A_0)^{-1} B^*,$$
$$nE_1 + X \geqslant B(nE_1 + A_0)^{-1} B^*,$$

где E_1 — единичный оператор в подпространстве $\mathfrak{H} \ominus D(A)$. Следовательно, оператор X может быть любым самосопряженным оператором, который удовлетворяет неравенствам

$$B(nE_1 - A_0)^{-1} B^* - nE_1 \leqslant X \leqslant -B(nE_1 - A_0) B^* + nE_1$$

и который определен в подпространстве $\mathfrak{H} \ominus D(A)$.

Этим самым решается поставленный нами вопрос.

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии наук СССР

Поступило
20 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Усп. мат. наук, 11, в. 3 (1947).