Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. А. ВИЛЬНЕР

НОМОГРАФИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ [1]

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 IX 1948)

1. Введем выражения K_{1t}, K_{2t}, K_{3t}, K_{4t}, J_{1t}, J_{2t}, J_{3t}, зависящие от аналитической функции $\varphi=\varphi(t)$ *:

$$K_{1t}=K_{1t}(\varphi)=\frac{1}{24\varphi\varphi^{\mathrm{I}}}\left[\left(\frac{\varphi^{\mathrm{II}}}{\varphi}\right)^{\mathrm{I}}\frac{1}{\varphi\varphi^{\mathrm{I}}}\right]^{\mathrm{I}},\qquad K_{2t}=K_{2t}(\varphi)=\frac{\varphi^{3}}{8\varphi^{\mathrm{I}}}\left[\left(\frac{\varphi^{\mathrm{II}}}{\varphi^{5}}\right)^{\mathrm{I}}\frac{\varphi^{3}}{\varphi^{\mathrm{I}}}\right]^{\mathrm{I}},$$

$$K_{3t}=K_{3t}(\varphi)=-\frac{1}{8\varphi\varphi^{\mathrm{I}}}\left[\left(\frac{\varphi^{\mathrm{II}}}{\varphi^{5}}\right)^{\mathrm{I}}\frac{\varphi^{5}}{\varphi^{\mathrm{I}}}\right]^{\mathrm{I}},\tag{1,1}$$

$$K_{4t}=K_{4t}(\varphi)=-\frac{\varphi^{3}}{48\varphi^{\mathrm{I}}}\left[\frac{\varphi^{3}}{\varphi^{\mathrm{I}}}\left\{\frac{\varphi^{3}}{\varphi^{\mathrm{I}}}\left[\frac{(\varphi^{\mathrm{I}})^{2}}{\varphi^{6}}\right]^{\mathrm{I}}\right\}^{\mathrm{I}}\right]^{\mathrm{I}};$$

$$J_{1t}=J_{1t}(\varphi)=\frac{\left[\frac{1}{\varphi^{2}}(\ln\varphi)^{\mathrm{II}}\right]^{\mathrm{I}}}{4\varphi^{2}(\ln\varphi)^{\mathrm{I}}},\qquad J_{2t}=J_{2t}(\varphi)=-\frac{\varphi^{3}}{2\varphi^{\mathrm{I}}}\left[\frac{(\ln\varphi)^{\mathrm{II}}}{\varphi^{4}}\right]^{\mathrm{I}},$$

$$J_{3t}=J_{3t}(\varphi)=\frac{\varphi^{5}}{2\varphi^{\mathrm{I}}}\left[\frac{1}{\varphi\varphi^{\mathrm{I}}}\left(\frac{[\ln\varphi]^{\mathrm{II}}}{\varphi^{2}}\right)^{\mathrm{I}}\right]^{\mathrm{I}}.\tag{1,2}$$

Назовем z (соответственно w) аналитическими номографическими параметрами нелинейной аналитической зависимости $F(w;z)=0$ второго (параметры K) и первого (параметры J) классов [2] выражения $K_{iz}=K_{iz}(dw/dz)$ $(i=1,2,3,4)$ и $J_{iz}(dw/dz)$ $(i=1,2,3)$ (соответственно $K_{iw}=K_{iw}(dz/dw)$ $(i=1,2,3,4)$ и $J_{iw}=J_{iw}(dz/dw)$ $(i=1,2,3)$).

Получаем: $K_{1z}=J_{1z}-\dfrac{K_{4z}}{(w^{\mathrm{I}})^{6}}$, $\quad K_{2z}=J_{2z}+\dfrac{3K_{4z}}{(w^{\mathrm{I}})^{4}}$, $\quad K_{3z}=J_{3z}-\dfrac{3K_{4z}}{(w^{\mathrm{I}})^{2}}$.

Тогда из (1,1), положив $\varphi=w^{\mathrm{I}}$ или $\varphi=z^{\mathrm{I}}$, получим дифференциальные уравнения зависимостей второго класса:

$$\begin{aligned}(w^{\mathrm{II}})^{2}&=K_{1z}(w^{\mathrm{I}})^{6}+K_{2z}(w^{\mathrm{I}})^{4}+K_{3z}(w^{\mathrm{I}})^{2}+K_{4z},\\(z^{\mathrm{II}})^{2}&=K_{1w}(z^{\mathrm{I}})^{6}+K_{2w}(z^{\mathrm{I}})^{4}+K_{3w}(z^{\mathrm{I}})^{2}+K_{4w}.\end{aligned}\tag{1,3}$$

* Римскими цифрами обозначены производные.

Аналогично из (1, 2), положив $\varphi = w^{\mathrm{I}}$ или $\varphi = z^{\mathrm{I}}$, получим дифференциальные уравнения зависимостей первого класса (1,4) или (1,5):

$$\begin{aligned} (w^{\mathrm{II}})^2 &= J_{1z}(w^{\mathrm{I}})^6 + J_{2z}(w^{\mathrm{I}})^4 + J_{3z}(w^{\mathrm{I}})^2, \\ (z^{\mathrm{II}})^2 &= J_{1z} + J_{2z}(z^{\mathrm{I}})^2 + J_{3z}(z^{\mathrm{I}})^4; \end{aligned} \tag{1,4}$$

$$\begin{aligned} (z^{\mathrm{II}})^2 &= J_{1w}(z^{\mathrm{I}})^6 + J_{2w}(z^{\mathrm{I}})^4 + J_{3w}(z^{\mathrm{I}})^2, \\ (w^{\mathrm{II}})^2 &= J_{1w} + J_{2w}(w^{\mathrm{I}})^2 + J_{3w}(w^{\mathrm{I}})^4. \end{aligned} \tag{1,5}$$

Из (1,3) и (1,1) получим: $K_{iw} = K_{(5-i)z}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $J_{1w} = J_{1z}(w^{\mathrm{I}})^6$, $J_{2w} = J_{3z} - 3J_{1z}(w^{\mathrm{I}})^4$, $J_{3w} = J_{2z} + 3J_{1z}(w^{\mathrm{I}})^2$.

Если $K_{1z} = K_{4w} = 0$, то $K_{1w} = K_{4z} = J_{1w}$, $K_{2w} = K_{3z} = J_{2w}$, $K_{3w} = K_{2z} = J_{3w}$, и (1,3) превращается в (1,5).

Если $K_{4z} = K_{1w} = 0$, то $K_{1z} = K_{4w} = J_{1z}$, $K_{2z} = K_{3w} = J_{2z}$, $K_{3z} = K_{2w} = J_{3z}$, и (1,3) превращается в (1,4).

Полагая $\varphi = dw/dz = w^{\mathrm{I}}$, можно записать выражения для параметров K в виде:

$$K_{1z} = \frac{w^{\mathrm{V}} w^{\mathrm{II}} (w^{\mathrm{I}})^2 - 3w^{\mathrm{IV}} (w^{\mathrm{II}})^2 w^{\mathrm{I}} + 3w^{\mathrm{III}} (w^{\mathrm{II}})^3 - w^{\mathrm{IV}} - w^{\mathrm{III}} (w^{\mathrm{I}})^2}{24 (w^{\mathrm{II}})^3 (w^{\mathrm{I}})^5},$$

$$K_{2z} = \frac{-w^{\mathrm{V}} w^{\mathrm{II}} (w^{\mathrm{I}})^2 + 5w^{\mathrm{IV}} (w^{\mathrm{II}})^2 w^{\mathrm{I}} - 5w^{\mathrm{III}} (w^{\mathrm{II}})^3 + w^{\mathrm{IV}} w^{\mathrm{III}} (w^{\mathrm{I}})^2}{8 (w^{\mathrm{II}})^3 (w^{\mathrm{I}})^3}$$

$$K_{3z} = \frac{w^{\mathrm{V}} w^{\mathrm{II}} (w^{\mathrm{I}})^2 - 7w^{\mathrm{IV}} (w^{\mathrm{II}})^2 w^{\mathrm{I}} + 15w^{\mathrm{III}} (w^{\mathrm{II}})^3 - w^{\mathrm{IV}} w^{\mathrm{III}} (w^{\mathrm{I}})^2}{8 (w^{\mathrm{II}})^3 w^{\mathrm{I}}}$$

$$K_{4z} = \frac{-w^{\mathrm{V}} w^{\mathrm{II}} (w^{\mathrm{I}})^3 + 9w^{\mathrm{IV}} (w^{\mathrm{II}})^2 (w^{\mathrm{I}})^2 - 33w^{\mathrm{III}} (w^{\mathrm{II}})^3 w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{IV}} w^{\mathrm{III}} (w^{\mathrm{I}})^3 + 24 (w^{\mathrm{II}})^5}{24 (w^{\mathrm{II}})^3}$$

Аналогично запишутся K_{iw}, J_{iz}, J_{iw} *.

Лемма. *Если один из параметров $K_{iz} = K_{(5-i)w}$ (соответственно один из параметров J_{iz}, либо соответственно один из параметров J_{iw}) равен постоянному, то обращаются в постоянные три других параметра (соответственно два других параметра J_{iz}, либо соответственно два других параметра J_{iw}).*

2. Теорема 1. *Для того чтобы данная аналитическая зависимость $F(w; z) = 0$ была номографируема одним выравниванием, необходимо и достаточно, чтобы параметры K_{iz} (или K_{iw} — что то же) были постоянны и действительны.*

При этом получаем следующие выражения для K_{iz}: $K_{1z} = J_{1z} + \frac{1}{6}\frac{w^{\mathrm{I}}}{w^{\mathrm{II}}} J^{\mathrm{I}}_{1z}$, $K_{2z} = J_{2z} + \frac{1}{4}\frac{w^{\mathrm{I}}}{w^{\mathrm{II}}} J^{\mathrm{I}}_{2z}$, $K_{3z} = J_{3z} + \frac{1}{2}\frac{w^{\mathrm{I}}}{w^{\mathrm{II}}} J^{\mathrm{I}}_{3z}$, $K_{4z} = -\frac{1}{6}\frac{(w^{\mathrm{I}})^7}{w^{\mathrm{II}}} J^{\mathrm{I}}_{1z} \equiv \frac{1}{12}\frac{(w^{\mathrm{I}})^5}{w^{\mathrm{II}}} J^{\mathrm{I}}_{2z} \equiv -\frac{1}{6}\frac{(w^{\mathrm{I}})^3}{w^{\mathrm{II}}} J^{\mathrm{I}}_{3z}$.

Теорема 2. *Для того чтабы зависимость была строго второго класса, необходимо и достаточно, чтобы в условиях теоремы 1 имели: $K_{1z}K_{4z} = K_{1w}K_{4w} \neq 0$. Если $K_{1z} = K_{4w} \equiv 0$, но $K_{4z} = K_{1w} \neq 0$, то будем иметь зависимость первого класса с w — прямолинейной переменной.*

Если $K_{4z} = K_{1w} \equiv 0$, но $K_{1z} = K_{4w} \neq 0$, то будем иметь зависимость первого класса с z — прямолинейной переменной. Если, нако-

* Практически удобно иметь выражения каждого из параметров K_{iz}, K_{iw}, J_{iz}, J_{iw} и в переменной z, и в переменной w; мы опускаем эти выражения.

нец, $K_{1z}=K_{4w}=K_{4z}=K_{1w}=0$, *то зависимость будет нулевого жанра.*

Теорема 3. *Для того чтобы данная аналитическая зависимость была первого номографического класса с z — прямолинейной переменной (соответственно w — прямолинейной переменной), необходимо и достаточно, чтобы 3 параметра J_{iz} были постоянны и действительны (соответственно, 3 параметра J_{iw} были постоянны и действительны). При этом, если $J_{iz}=0$ (в этом случае и $J_{iw}=0$ и обратно), то будем иметь зависимость нулевого жанра; это условие необходимо и достаточно*.*

Общие дифференциальные уравнения типа (1,3) шестой степени интегрируются в ультраэллиптических интегралах. По причине отсутствия нечетных степеней задача упрощается.

3. Интегрируя первое уравнение (1,3) или (1,4), получим общую каноническую форму номографируемых зависимостей:

$$w-w_0=\sqrt{K_{4z}}\int\limits_0^{z-z_0}\frac{d\sigma}{\sqrt{\wp\left[\sigma;\, g_2';\, g_3'\right]-K_{3z}/3}}\,, \tag{3,1}$$

$$z-z_0'=\sqrt{K_{1z}}\int\limits_0^{w-w_0'}\frac{d\sigma}{\sqrt{\wp\left[\sigma;\, g_2'';\, g_3''\right]-K_{2z}/3}} \tag{3,2}$$

при условиях, соответственно, $K_{4z}\neq 0$ и $K_{1z}\neq 0$, т. е. при условиях, когда z является заведомо непрямолинейной переменной или, соответственно, w — заведомо непрямолинейная переменная (случай зависимостей нулевого жанра, характеризующийся условием $K_{1z}=K_{4z}=0$ или, что то же, $K_{1w}=K_{4w}=0$, мы опускаем).

При этом:

$$g_2'=\frac{4}{3}(K_{3z}^2-3K_{2z}K_{4z}),\quad g_3'=\frac{4}{27}(9K_{2z}K_{3z}K_{4z}-2K_{3z}-27K_{1z}K_{4z}^2),$$

$$g_2''=\frac{4}{3}(K_{2z}^2-3K_{3z}K_{1z}),\quad g_3''=\frac{4}{27}(9K_{2z}K_{3z}K_{1z}-2K_{2z}^3-27K_{1z}^2K_{4z}),$$

$$\begin{gathered}\Delta(g')=g_3'^3-27g_3'^2=16K_{4z}^2[K_{2z}^2(K_{3z}^2-4K_{2z}K_{4z})+\\+K_{1z}(18K_{2z}K_{3z}K_{4z}-4K_{3z}^3-27K_{1z}K_{4z}^2)],\\ \Delta(g'')=g_2''^3-27g_3''^2=16K_{1z}^2[K_{2z}^2(K_{3z}^2-4K_{2z}K_{4z})+\\+K_{1z}(18K_{2z}K_{3z}K_{4z}-4K_{3z}^3-27K_{1z}K_{4z}^2)],\\ 4\left(\frac{K_{3z}}{3}\right)^3-g_2'\left(\frac{K_{3z}}{3}\right)-g_3'=4K_{1z}K_{4z}^2,\\ 4\left(\frac{K_{2z}}{3}\right)^3-g_2''\left(\frac{K_{2z}}{3}\right)-g_3''=4K_{4z}K_{1z}^2.\end{gathered} \tag{3,3}$$

Формула (3,2) является обращением формулы (3,1) и обратно (при условии $K_{1z}K_{4z}=K_{1w}K_{4w}\neq 0$).

Уравнения (3,3) показывают, что, если в (3,1) (аналогично в (3,2)) заданы произвольные действительные инварианты g_2' и g_3', то могут быть еще назначены произвольные действительные значения для

* Зависимостям первого класса посвящены работы автора [2,3].

$K_{4z}=K_{1w}$ и $K_{3z}=K_{2w}$, после чего однозначно определяются действительные значения для $K_{1z}=K_{4w}$ и $K_{2z}=K_{3w}$ (аналогично для (3,2)).

Следовательно, общей канонической формой номографируемых зависимостей ненулевого жанра являются две (взаимно обратные при $A'A''\neq 0$) аналитические зависимости:

$$w-w_0'=A'\int\limits_0^{z-z_0'}\frac{d\sigma}{\sqrt{\wp\left[\sigma;\, g_2';\, g_3'\right]-B'}}\,, \tag{3,4}$$

$$z-z_0''=A''\int\limits_0^{w-w_0''}\frac{d\sigma}{\sqrt{\wp\left[\sigma;\, g_2'';\, g_3''\right]-B''}}\,, \tag{3,5}$$

причем, если $K_{4z}K_{1z}=K_{4w}K_{1w}=A'^2A''^2\neq 0$, то (3,4) и (3,5) существуют одновременно и зависимость между A', B', A'', B'', g_2', g_3', g_2'', g_3'' дается формулами:

$$K_{4z}=A'^2,\quad K_{1z}=A''^2,\quad K_{2z}=3B'',\quad K_{3z}=3B',\ \Delta(g'')/\Delta(g')=(A'')^4/(A')^4,$$
$$4(B')^3-g_2'(B')-g_3'=4(A')^4(A'')^2,\ \ 4(B'')^3-g_2''(B'')-g_3''=4(A'')^4(A')^2,$$
$$g_2'=12\left[(B')^2-B''(A')^2\right],\quad g_3'=4\left[3B'B''(A')^2-2(B')^3-(A'')^2(A')^4\right],$$
$$g_2''=12\left[(B'')^2-B'(A'')^2\right]',\ g_3''=4\left[3B'B''(A'')^2-2(B'')^3-(A'')^4(A')^2\right],$$
$$g_2''=\frac{4}{3}\left[9\frac{(B')^4}{(A')^4}+\frac{(g_2')^2}{16(A')^4}-\frac{3g_2'(B')^2}{2(A')^4}-9B'(A'')^2\right],$$
$$g_3''=\frac{4}{27}\left\{27(B')(A'')^2\left[\frac{3(B')^2}{(A')^2}-\frac{g_2'}{4(A')^2}\right]-\right.$$
$$\left.-2\left[\frac{3(B')^2}{(A')^2}-\frac{g_2'}{4(A')^2}\right]^3-27(A')^2(A'')^4\right\},$$

из которых определяются значения для A'', B'', g_2'', g_3'' по A', B', g_2', g_3', причем A' и A'' — действительные или чисто мнимые числа, а g_2', g_3', g_2'', g_3'', B' и B'' — действительные числа.

Приведенные формулы показывают, что, если $A'A''\neq 0$, то B' и B'' не являются корнями соответствующих $\wp$-функций Вейерштрасса, и наоборот, если $A'A''=0$, то B' и B'' суть действительные корни соответствующих $\wp$-функций.

Задача практически эффективного номографирования* зависимостей второго класса решена в другой посвященной этому работе автора.

Поступило
1 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Вильнер, ДАН, 58, № 5 (1947). [2] И. А. Вильнер, ДАН, 53, № 3 (1946). [3] И. А. Вильнер, ДАН, 55, № 9 (1947).

* Имеется в виду номографирование одним выравниванием. В других работах автор затрагивает вопросы номографирования аналитических зависимостей с произвольным числом выравниваний и другие обобщения.