Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. КУДРЯШЕВ

ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ТЕПЛООБМЕНА

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 7 IX 1948)

В случае плоского обтекания при больших числах Рейнольдса система дифференциальных уравнений, определяющих скоростное и температурное поля, имеет вид:

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}, \tag{3}$$

где w_x, w_y — проекции вектора скорости на координатные оси в м/сек.; τ — время в сек.; ν — коэффициенты кинематической вязкости в м^2/сек.; ρ — плотность жидкости в кг·сек./м^4; t — температура в данной точке потока, отсчитанная от температуры поверхности тела, где она условно принята равной 0° С; a — коэффициент температуропроводности в м^2/сек.

В. В. Голубев получил из уравнений (1) и (2) общую форму интегрального соотношения для гидродинамического ламинарного пограничного слоя, из которой легко получаются как интегральное соотношение Кармана [1], соответствующее применению закона количества движения, так и интегральное соотношение Л. С. Лейбензона [2], отвечающее теореме об изменении энергии.

По аналогии с гидродинамическим пограничным слоем, Г. Н. Кружилиным [3] введено понятие теплового пограничного слоя конечной толщины, внешняя граница которого определяется из условия:

$$\text{при } y = \delta_2 \qquad t = t_0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Используя метод В. В. Голубева, можно вывести обобщенное интегральное соотношение для этого теплового пограничного слоя конечной толщины, равной δ_2. Для этой цели достаточно умножить обе части уравнения (3) на t^k и выполнить интегрирование в пределах от 0 до δ_2:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\delta_2}\frac{t^{k+1}}{k+1}dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_2}\frac{t^{k+1}}{k+1}w_x dy-\frac{t_0^{k+1}(x;\tau)}{k+1}\int_0^{\delta_2}w_x dy-$$

$$-\frac{t_0^{k+1}(x;\tau)}{k+1}\frac{\partial\delta_2}{\partial\tau}=a\int_0^{\delta_2}t^k\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dy; \tag{4}$$

здесь $t_0(x;\tau)$ — температура внешнего потока в °С.

Это выражение представляет собой первую форму обобщенного интегрального соотношения для теплового пограничного слоя.

Интегрируя по частям правую часть уравнения (4), получим вторую форму интегрального соотношения для теплового пограничного слоя:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\delta_2}\frac{t^{k+1}}{k+1}dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_2}\frac{t^{k+1}}{k+1}w_x dy-\frac{t_0^{k+1}(x;\tau)}{k+1}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_2}w_x dy-$$

$$-\frac{t_0^{k+1}(x;\tau)}{k+1}\frac{\partial\delta_2}{\partial\tau}=-ka\int_0^{\delta_2}t^{k-1}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 dy. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) действительны при любом положительном k. При $k=0$ из выражения (4) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\delta_2}t\,dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_2}tw_x dy-t_0(x;\tau)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_2}w_x dy-t_0(x;\tau)\frac{\partial\delta_2}{\partial\tau}=$$

$$=-a\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{6}$$

Полученное соотношение соответствует уравнению теплового баланса для теплового пограничного слоя.

В частном случае стационарного теплообмена это уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dx}\left[t_0(x)\int_0^{\delta_2}w_x dy-\int_0^{\delta_2}w_x t\,dy\right]=a\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{7}$$

т. е. приходим к уравнению, которым пользуются в своих работах Г. Н. Кружилин ([3]) и Шваб ([4]).

Обобщенное интегральное соотношение в случае стационарного теплообмена может быть представлено в другом виде, а именно:

$$\frac{d}{dx}\left(t_0^{k+1}W\delta^{*}_{2,\,k+1}\right)=\frac{dt_0^{k+1}}{dx}\int_0^{\delta_2}w_x dy-(k+1)a\int_0^{\delta_2}t^k\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dy, \tag{8}$$

где введено обозначение:

$$\delta^{**}_{2,\,k+1}=\int_0^{\delta_2}\frac{w_x}{W}\left(1-\frac{t^{k+1}}{t_0^{k+1}}\right)dy. \tag{9}$$

Величина $\delta_{2,k+1}^{**}$ является характерной линейной величиной для теплового пограничного слоя и имеет смысл потери теплосодержания за счет теплообмена.

Практически при решении конкретных задач о теплообмене между потоком и обтекаемым контуром, а также обратно можно ограничиться частным случаем выражения (8), если положить в нем $k=0$:

$$\frac{d}{dx}(t_0 W \delta_2^{**}) = \frac{dt_0}{dx}\int_0^{\delta_2} w_x\, dy + a\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{10}$$

При применении полученных интегральных соотношений для теплового пограничного слоя к расчету коэффициента теплообмена рекомендуется следующий путь.

Неизвестные профиль продольной скорости в гидродинамическом слое и распределение температур в тепловом слое заменяются полиномиальными кривыми, удовлетворяющими граничным условиям у стенки и на внешних границах гидродинамического и теплового пограничных слоев. В зависимости от числа наперед поставленных граничных условий выбираются степени многочленов. Затем при помощи интегральных соотношений Кармана или Л. С. Лейбензона определяется толщина гидродинамического слоя δ_1, и впоследствии с помощью ее из интегрального соотношения для теплового пограничного слоя находится толщина теплового слоя δ_2, после чего по ней определяется коэффициент теплообмена из соотношения:

$$\alpha = 2\lambda/\delta_2. \tag{11}$$

Следует отметить, что интегральное соотношение, соответствующее применению энергетического метода, позволяет получить более быстро высокую степень приближения, чем интегральное соотношение, отвечающее применению теоремы количества движения.

Применение изложенного метода позволило рассчитать коэффициент теплообмена в случае обтекания плоской пластинки при постоянной температуре внешнего потока, равной t_0.

Ограничиваясь использованием интерполяционных полиномов четвертых степеней как для профиля продольных скоростей, так и перепадов температур, получено для среднего значения критерия $\overline{\mathrm{Nu}}$ следующее уравнение:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}69\, \overline{\mathrm{Pr}}^{1/3} \mathrm{Re}^{1/2}. \tag{12}$$

Е. Польгаузен [5], непосредственно интегрируя уравнение (3), получил:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}664\, \overline{\mathrm{Pr}}^{1/3} \mathrm{Re}^{1/2}, \tag{13}$$

т. е. применение метода интегральных соотношений дает удовлетворительное совпадение результатов.

Применение метода интегральных соотношений позволяет решить задачу для более общего случая теплообмена при обтекании плоской пластинки, когда $dt_0/dx \neq 0$, т. е. когда температура внешнего потока t_0 уже не постоянная величина, равная температуре на бесконечности $t_{0,\infty}$, а заданная функция абсциссы:

$$t_0 = t_0(x).$$

В этом случае получено следующее уравнение:

$$\overline{\mathrm{Nu}}=0{,}345\,\overline{\mathrm{Pr}}^{1/3}\,\overline{\mathrm{Re}}^{1/2}\int\limits_0^1 \overline{\Phi}^{1/3}(\xi)\,\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}\,; \tag{14}$$

здесь $\xi=x/l$ — безразмерная абсцисса;

$$\Phi(\xi)=\exp\left[10{,}1\int\limits_0^{\xi}\frac{t_0'(\xi)}{t_0(\xi)}\,d\xi\right]\int\limits_0^{\xi}\exp\left[-10{,}1\int\limits_0^{\xi}\frac{t_0'(\xi)}{t_0(\xi)}\,d\xi\right]d\xi.$$

Если $\Phi(\xi)=1$, то получаем уже известный нам результат в виде уравнения (12).

Поступило
20 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Kármán, Z. angew. Math. u. Mech., 1, 232 (1921). [2] Л. С. Лейбензон, Тр. ЦАГИ, в. 240 (1935). [3] Г. Н. Кружилин, ЖТФ, 6, в. 3 (1936). [4] В. А. Шваб, ЖТФ, 6, в. 7 (1937). [5] E. Pohlhausen, Z. angew. Math. u. Mech., 1, 115 (1921).