Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. Д. ТАРАБАСОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНКЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПРЕССОВАННЫМИ В НЕЕ КРУГЛЫМИ ШАЙБАМИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 10 IX 1948)

Пусть рассматриваемая круглая тонкая пластинка заполняет многосвязную область S_0, расположенную в плоскости $z = x + iy$ и ограниченную извне окружностью γ_0 радиуса r_0 с центром в начале координат, а изнутри — окружностями γ_n радиусов r_n с центрами в

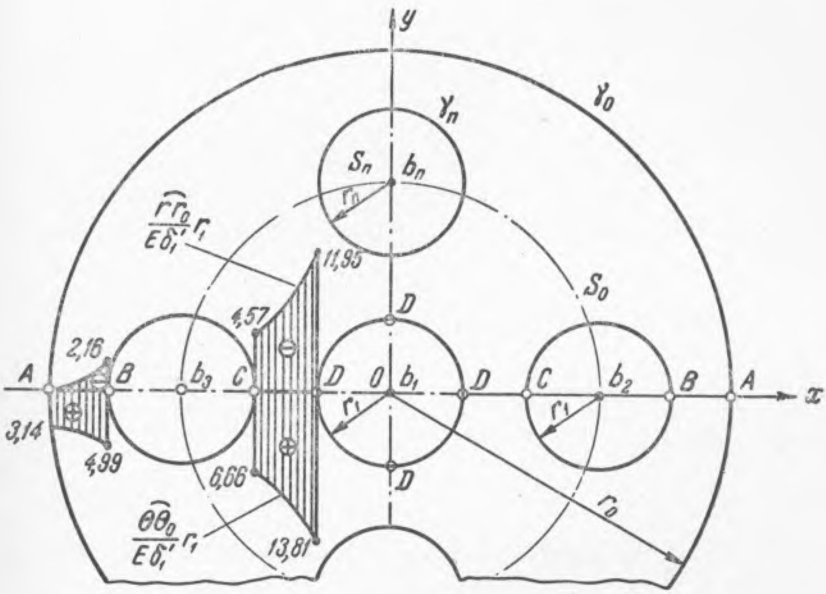

Рис. 1

точках b_n. Будем считать, что окружности γ_n $(n=0, 1, \ldots, m)$ не пересекают друг друга.

Предположим далее, что в каждое круглое отверстие пластинки вставлена путем запрессовки с заданным натяжением круглая шайба одинаковой с ней толщины. Область шайбы, ограниченную окружностью γ_n, обозначим через S_n (см. рис. 1, где $m=5$, шайбы расположены симметрично и их радиусы равны между собой). Материал пластинки и шайб будем считать упругим, изотропным и однородным с одинаковыми механическими свойствами.

В настоящей статье дается вывод формул для определения компонентов вектора напряжения любой точки области S_n $(n=0, 1, \ldots, m)$ при условии, что на контуре γ_0 известны внешние силы, а на остальных контурах γ_n $(n=1, 2, \ldots, m)$ заданы скачки векторов смещений. При этом рассматривается случай, когда скачок вектора смещения одинаков по величине для всех точек контура γ_n $(n=1, 2, \ldots, m)$ и численно равен разности радиусов соответствующего отверстия пластинки и шайбы до посадки, а направление его в любой точке контура γ_n совпадает с направлением нормали к γ_n $(n=1, 2, \ldots, m)$.

Пусть r_n' — первоначальный радиус отверстия γ_n в пластинке, r_n'' — радиус соответствующей шайбы (до посадки) и δ_n' — скачок смещения на контуре γ_n. Тогда $\delta_n' = r_n'' - r_n'$ $(n=1, 2, \ldots, m)$. Величины δ_n', вообще говоря, различны между собой.

Согласно исследованиям Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили, рассматриваемая задача сводится к определению функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, регулярных в соответственных областях S_n $(n=0, 1, \ldots, m)$ и удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f(t) \text{ на } \gamma_0; \tag{1}$$

$$\varkappa\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \varkappa\varphi_n(t) - t\overline{\varphi_n'(t)} - \overline{\psi_n(t)} + \delta_n(t-b_n), \tag{2}$$

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \varphi_n(t) + t\overline{\varphi_n'(t)} + \overline{\psi_n(t)} \text{ на } \gamma_n \ (n=1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Здесь $f(t)$ — известная функция, равная

$$f(t) = i\int_0^s (X_0 + iY_0)\,ds,$$

где X_0 и Y_0 — компоненты вектора напряжения, приложенного к контуру γ_0, s — дуга γ_0 и t — комплексная координата точек γ_n $(n=0, 1, \ldots, m)$.

Далее,

$$\delta_n = \frac{2\delta_n'\mu}{r_n}, \quad \varkappa = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{4}$$

причем E, μ и σ — соответственно модуль упругости первого рода, второго рода и коэффициент Пуассона.

Согласно формуле (2) имеем

$$2\mu\{(u_0 - u_n) + i(v_0 - v_n)\} = \delta_n(t-b_n) \text{ на } \gamma_n \ (n=1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

где u_0, v_0 и u_n, v_n — компоненты вектора смещения соответственно в области S_0 и S_n.

Положим на γ_n $(n=1, 2, \ldots, m)$

$$\varphi_0(t) - \varphi_n(t) = \varphi_n^*(t), \quad \psi_0(t) - \psi_n(t) = \psi_n^*(t). \tag{6}$$

Тогда уравнения (3) и (2) можно записать в следующем виде

$$\begin{gathered}\varkappa\varphi_n^*(t) - t\overline{\varphi_n^{*\prime}(t)} - \overline{\psi_n^*(t)} = \delta_n(t-b_n),\\ \varphi_n^*(t) + t\overline{\varphi_n^{*\prime}(t)} + \overline{\psi_n^*(t)} = 0 \text{ на } \gamma_n \ (n=1, 2, \ldots, m).\end{gathered} \tag{7}$$

Замечая, что $\bar{t} = \bar{b}_n + r_n^2/(t-b_n)$, получим из уравнений (7)

$$\varphi_n^*(t) = \frac{\delta_n(t-b_n)}{1+\varkappa}, \quad \psi_n^*(t) = -\frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)(t-b_n)} - \frac{\delta_n\bar{b}_n}{1+\varkappa} \tag{8}$$

на γ_n $(n=1, 2, \ldots, m)$.

Отсюда, учитывая (6), найдем

$$\varphi_0(t) = \varphi_n(t) + \frac{\delta_n(t-b_n)}{1+\varkappa}, \quad \psi_0(t) = \psi_n(t) - \frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)(t-b_n)} - \frac{\delta_n \overline{b}_n}{1+\varkappa} \tag{9}$$

на γ_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$.

Введем теперь новые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные в области S_0 и равные

$$\varphi(z) = \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \sum_{n=1}^{m} \frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)(z-b_n)}. \tag{10}$$

В силу формул (9) и (10) будем иметь:

$$\varphi(t) = \varphi_n(t) + \frac{\delta_n(t-b_n)}{1+\varkappa}, \quad \psi(t) = \psi_n(t) + \sum_{n=1}^{m} \frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)(t-b_n)} -$$

$$- \frac{2\delta_n r_n^2}{(1+\varkappa)(t-b_n)} - \frac{\delta_n \overline{b}_n}{1+\varkappa} \text{ на } \gamma_n \ (n = 1, 2, \ldots, m). \tag{11}$$

Последние соотношения показывают, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные в области S_0, совпадают на кривых γ_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$ со значениями некоторых функций, регулярных в соответственных областях S_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$. Поэтому $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитически продолжимы из области S_0 в каждую из областей S_n $(n = 1, 2, \ldots, m)$ и, таким образом, будут регулярными всюду в области S, ограниченной контуром γ_0*.

Подставив в уравнение (1) вместо функций $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$ их выражения через $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ по формуле (10), получим на γ_0:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{2\delta_n r_n^2 \, t}{(1+\varkappa)(r_0^2 - \overline{b}_n t)} + f(t). \tag{12}$$

Из этого равенства ясно, что отыскание $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ сводится к решению первой основной задачи теории упругости для области S. Используя прием, указанный в (2) Н. И. Мусхелишвили, получим выражения для этих функций

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\delta_n r_n^2}{1+\varkappa}\left(\frac{2z}{r_0^2 - \overline{b}_n z} - \frac{z}{r_0^2}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{z}{2t^2} - \frac{1}{t}\right) f(t)\,dt,$$

$$\psi(z) = -\sum_{n=1}^{m} \frac{\delta_n r_n^2}{1+\varkappa}\frac{r_0^2}{z}\left[\frac{2r_0^2}{(r_0^2 - \overline{b}_n z)^2} - \frac{2}{r_0^2}\right] + \tag{13}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\left\{\frac{\overline{f(t)}}{t-z} - \frac{r_0}{z}\left[\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{t^2}\right] f(t)\right\} dt.$$

Имея в виду формулы (13), без труда найдем на основании (10) и (11) искомые функции $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ $(n = 0, 1, \ldots, m)$, а затем по известным формулам компоненты напряжений в областях S_n $(n = 0, 1, \ldots, m)$.

Наибольший интерес представляют компоненты напряжений для области S_0. Полагая для простоты, что внешняя граница γ_0 свободна

---

* Здесь мы используем метод, предложенный Д. И. Шерманом (1).

от усилий, т. е. $f(t)=0$ (этот случай практически наиболее интересен), будем иметь

$$\varphi_0(z)=\sum_{n=1}^{m}\frac{\delta_n r_n^2}{1+\varkappa}\left(\frac{2z}{r_0^2-\bar b_n z}-\frac{z}{r_0^2}\right),$$

$$\psi_0(z)=-\sum_{n=1}^{m}\frac{2r_0^2r_n^2\delta_n}{(1+\varkappa)\,z}\left[\frac{r_0^2}{(r_0^2-\bar b_n z)^2}-\frac{1}{r_0^2}+\frac{z}{r_0^2(z-b_n)}\right]. \tag{14}$$

Отсюда получим для компонентов напряжения в полярных координатах следующие формулы

$$\widehat{rr}_0=\sum_{n=1}^{m}\frac{E\delta_n' r_n}{2}\left\{\frac{(r_0^2-x_nx-y_ny)^2-(xy_n-x_ny)^2}{[r_0^4-2r_0^2(x_nx+y_ny)+r^2b_n^2]^2}\left(2-\frac{r_0^2}{r^2}\right)r_0^2+\right.$$
$$+\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}-\frac{(r^2-x_nx-y_ny)^2-(xy_n-x_ny)^2}{r^2[r^2+b_n^2-2(x_nx+y_ny)]^2}+ \tag{15}$$
$$\left.+2r_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2}-1\right)\frac{(x_nx+y_ny)[r_0^6+b_n^2r^2(3r_0^2-x_nx-y_ny)]-b_n^2r^2[3r_0^4-(xy_n-x_ny)^2]}{[r_0^4-2r_0^2(x_nx+y_ny)+r^2b_n^2]^3}\right\},$$

$$\widehat{\theta\theta}_0=\sum_{n=1}^{m}\frac{E\delta_n' r_n}{2}\left\{\frac{(r_0^2-x_nx-y_ny)^2-(xy_n-x_ny)^2}{[r_0^4-2r_0^2(x_nx+y_ny)+r^2b_n^2]^2}\left(2+\frac{r_0^2}{r^2}\right)r_0^2-\right.$$
$$-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}+\frac{(r^2-x_nx-y_ny)^2-(xy_n-x_ny)^2}{r^2[r^2+b_n^2-2(x_nx+y_ny)]^2}+ \tag{16}$$
$$\left.+2r_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2}-1\right)\frac{(x_nx+y_ny)[r_0^6+b_n^2r^2(3r_0^2-x_nx-y_ny)]-b_n^2r^2[3r_0^4-(xy_n-yx_n)^2]}{[r_0^4-2r_0^2(x_nx+y_ny)+r^2b_n^2]^3}\right\},$$

$$\widehat{r\theta}_0=\sum_{n=1}^{m}\frac{E\delta_n' r_n}{2}\left\{\left(\frac{r_0^2}{r^2}-1\right)\frac{2r_0^2(xy_n-x_ny)[r_0^6-r^2b_n^2(3r_0^2-2x_nx-2y_ny)]}{[r_0^4-2r_0^2(x_nx+y_ny)+r^2b_n^2]^3}-\right.$$
$$\left.-\frac{2r_0^4(xy_n-x_ny)[r_0^2-(x_nx+y_ny)]}{r^2[r_0^4-2r_0^2(x_nx+y_ny)+r^2b_n^2]^2}+\frac{(xy_n-x_ny)[2r^2-2(x_nx-y_ny)]}{r^2[r^2+b_n^2-2(x_nx+y_ny)]^2}\right\}. \tag{17}$$

Здесь $b_n^2=x_n^2+y_n^2$; $r^2=x^2+y^2$; x и y — координаты любой точки области S_0.

Для частного случая, когда число шайб $m=5$, $\delta_n'=\delta_1'$, $r_n=r_1$ ($n=1, 2, \ldots, 5$), $r_0=5r_1$, $b_1=0$, $|b_n|=3r_1$ ($n=2, \ldots, 5$), нами построены эпюры безразмерных величин $\frac{\widehat{rr}_0}{E\delta_1'}r_1$ и $\frac{\widehat{\theta\theta}_0}{E\delta_1'}r_1$, связанных с напряжениями.

В заключение отметим, что, используя прием, указанный в ([3]) Д. И. Шерманом, можно решить рассмотренную здесь задачу в более общей постановке, когда упругие постоянные пластинки и шайб различны между собой. Этот прием представляется достаточно эффективным в случае, когда различие в упругих постоянных сред не превосходит примерно 25—30%.

Поступило
14 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Шерман, ДАН, 27, № 9 (1940). [2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, 1935. [3] Д. И. Шерман, Изв. АН СССР, ОТН, № 9 (1948).