Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

С. Н. ЧЕРНИКОВ

К ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ p-ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 6 IX 1948)

В работах автора ([1—3]) установлено, что каждая локально-конечная p-группа, удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп, является специальной группой, т. е. расширением прямого произведения конечного множества примарных абелевых групп типа p^∞ (квазициклических p-групп) при помощи конечной p-группы. Справедливо также обратное предложение о том, что такого рода расширение является локально-конечной p-группой, удовлетворяющей условию минимальности для своих подгрупп. В связи с этими результатами естественно возникает вопрос о строении локально-конечных p-групп, удовлетворяющих условию минимальности лишь для абелевых подгрупп.

1. Решение этого вопроса существенно опирается на следующие теоремы 1 и 2, имеющие также самостоятельное значение, и леммы 1, 2, 3, 4, 5, самостоятельного значения не имеющие.

Теорема 1. *Группа $\mathfrak{G}$ произвольной мощности тогда и только тогда обладает возрастающим центральным рядом, когда каждая ее счетная подгруппа обладает рядом такого рода.*

Необходимость условия теоремы очевидна. Достаточность этого условия легко получить, опираясь на следующее почти очевидное предложение.

Группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда обладает возрастающим центральным рядом, когда для каждого ее элемента G в каждой последовательности ее элементов $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ можно указать такой член X_k, для которого сложный коммутатор

$$(G, X_1, X_2, \ldots, X_k) = [\ldots[[G, X_1], X_2], \ldots, X_k]$$

совпадает с единицей группы $\mathfrak{G}$.

Теорема 2. *Если порядки образующих элементов p-группы конечного класса, т. е. p-группы, обладающей верхним (нижним) центральным рядом конечной длины, ограничены в совокупности, то порядки всех элементов этой группы также ограничены в совокупности.*

Для абелевых p-групп, т. е. для p-групп класса 1, эта теорема очевидна. Для p-групп произвольного класса k теорема устанавливается индукцией по длине нижнего центрального ряда.

Лемма 1. *Если локально-конечная p-группа $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то ее фактор-группа по любой подгруппе $\mathfrak{Z}$ ее центра удовлетворяет этому же условию.*

Случай произвольной группы $\mathfrak{Z}$ легко сводится к случаю, когда эта группа конечна, и к случаю, когда она является прямым произведением конечного числа квази-циклических p-групп. В первом случае доказательство предложения леммы получается без труда. Второй же случай можно, пользуясь теоремой 2, свести к первому.

Лемма 2. *Если бесконечная локально-конечная p-группа $\mathfrak{P}$, обладающая возрастающим центральным рядом, удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то ее максимальная полная подгруппа отлична от единицы и коммутативна.*

Если максимальная полная подгруппа группы $\mathfrak{P}$ не отличается от единицы, то, опираясь на лемму 1, можно доказать, что все факторы верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{P}$, имеющие номера меньше ω, конечны. Следовательно, этот ряд содержит член с номером ω. Рассматривая далее пересечение централизаторов его членов, обладающих номерами меньшими ω, легко получаем сначала бесконечность этого пересечения, а затем отсюда противоречие с предположением о максимальной полной подгруппе группы $\mathfrak{P}$. Коммутативность этой полной группы является следствием существования у нее возрастающего центрального ряда ([4]).

Следствие. *Если локально-конечная p-группа, все абелевы подгруппы которой конечны, обладает возрастающим центральным рядом, то она сама конечна.*

Лемма 3. *Пусть p — нечетное простое число и $\mathfrak{P}$ — такое расширение некоторой абелевой p-группы $\mathfrak{A}$, что порядок фактор-группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ равен числу p. Если центр группы $\mathfrak{P}$ конечен, то он содержит не все элементы p-го порядка из группы $\mathfrak{A}$.*

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{P}$ — такое расширение квази-циклической 2-группы $\mathfrak{A}$, что порядок фактор-группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{A}$ равен 2. Если центр группы $\mathfrak{P}$ содержит элементы порядка 4, то группа $\mathfrak{P}$ абелева.*

Доказательства лемм 3 и 4 легко получить, пользуясь методами работы ([5]).

Лемма 5. *Локально-конечная p-группа $\mathfrak{P}$, обладающая возрастающим центральным рядом, тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для абелевых групп, когда она является специальной группой.*

Доказательство. Достаточность условий леммы очевидна (см. введение). Докажем необходимость условия леммы. Так как группа $\mathfrak{P}$ обладает возрастающим центральным рядом, то ее максимальная полная подгруппа $\mathfrak{R}$ абелева ([4]). Докажем, что фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, если этому условию удовлетворяет группа $\mathfrak{P}$. С этой целью предположим, что такому условию группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ не удовлетворяет. Тогда в ней найдется бесконечная абелева подгруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$, все отличные от единицы элементы которой имеют порядок p. Обозначим далее через $\mathfrak{R}_1$ максимальную отличную от $\mathfrak{R}$ полную подгруппу группы $\mathfrak{R}$, инвариантную в $\mathfrak{A}$.

Централизатор в группе $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}_1$ множества элементов p-го порядка из $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_1$ имеет, очевидно, конечный индекс $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}_1$ и содержит группу $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_1$. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — его прообраз в группе $\mathfrak{A}$. Обозначим далее через $\mathfrak{R}_2$ максимальную отличную от $\mathfrak{R}$ полную подгруппу группы $\mathfrak{R}$, инвариантную в $\mathfrak{A}_1$. Централизатор в группе $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{R}_2$ маножества элементов p-го порядка из $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_2$ имеет конечный индекс в $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}_2$ и содержит группу $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_2$. Пусть $\mathfrak{A}_2$ — его прообраз в группе $\mathfrak{A}_1$. Существует такое натуральное число k, для которого группа $\mathfrak{R}_{k-1}$ совпадает с $\mathfrak{R}_k$. Так как каждая из групп $\mathfrak{A}_i$ содержит группу $\mathfrak{R}$ и имеет конечный индекс в бесконечной группе $\mathfrak{A}$, то каждая из групп $\mathfrak{A}_i/\mathfrak{R}$, а значит и группа $\mathfrak{A}_k/\mathfrak{R}$, бесконечна, причем порядок каждого отличного от единицы элемента группы $\mathfrak{A}_k/\mathfrak{R}$ равен числу p.

Из определения группы $\mathfrak{A}_k/\mathfrak{R}_k = \overline{\mathfrak{A}}_k$ вытекает, что ее центр содержит все элементы p-го порядка из группы $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_k = \overline{\mathfrak{R}}$. Если $\overline{A}$ — представитель произвольного из отличных от $\overline{\mathfrak{R}}$ смежных классов, составляющих фактор-группу $\overline{\mathfrak{A}}_k/\overline{\mathfrak{R}}$, то отсюда вытекает, что центр группы $\{\overline{\mathfrak{R}}, \overline{A}\}$, порожденной элементами группы $\overline{\mathfrak{R}}$ и элементом $\overline{A}$, содержит все элементы p-го порядка из $\overline{\mathfrak{R}}$. Если p — нечетное простое число, то это означает, ввиду леммы 3, что центр группы $\{\overline{\mathfrak{R}}, \overline{A}\}$ бесконечен и, значит, бесконечна максимальная полная подгруппа $\overline{\mathfrak{N}}$ этого центра. Так как группа $\{\overline{\mathfrak{R}}, \overline{A}\}$ инварианта в группе $\overline{\mathfrak{A}}_k$, то группа $\overline{\mathfrak{N}}$, будучи характеристической подгруппой центра группы $\{\overline{\mathfrak{R}}, \overline{A}\}$, инвариантна в $\overline{\mathfrak{A}}_k$. Так как группа $\overline{\mathfrak{R}}$, по определению группы $\mathfrak{R}_k$, не содержит истинных полных нормальных делителей группы $\overline{\mathfrak{A}}_k$, то это означает, что группа $\overline{\mathfrak{N}}$ совпадает с группой $\overline{\mathfrak{R}}$. Так как $\overline{A}$ — произвольный элемент произвольного отличного от $\overline{\mathfrak{R}}$ смежного класса группы $\overline{\mathfrak{A}}_k/\overline{\mathfrak{R}}$, то отсюда вытекает, что группа $\overline{\mathfrak{R}}$ содержится в центре группы $\overline{\mathfrak{A}}_k$. Ввиду леммы 1 группа $\overline{\mathfrak{A}}_k$ не удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп и, значит, имеет бесконечную абелеву подгруппу $\overline{\mathfrak{A}}^{(1)} = \mathfrak{A}^{(1)}/\mathfrak{R}$, все отличные от единицы элементы которой имеют порядок p.

Группа $\mathfrak{R}_k$ является истинной полной подгруппой группы $\mathfrak{R}$ и, значит, разлагается в прямое произведение меньшего числа квазициклических p-групп, чем группа $\mathfrak{R}$. Поэтому, заменяя в предыдущих рассуждениях группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{R}$ соответственно группами $\mathfrak{A}^{(1)}$ и $\mathfrak{R}_k$, а затем группы $\mathfrak{A}^{(1)}$ и $\mathfrak{R}_k$ группами, полученными после первой замены, и т. д., мы придем, наконец, к бесконечной абелевой подгруппе группы $\mathfrak{A}$, имеющей, исключая единичный элемент, лишь элементы порядка p. Следовательно, при p нечетном группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Так как $\mathfrak{R}$ максимальная полная подгруппа группы $\mathfrak{P}$, то отсюда, ввиду следствия леммы 2, вытекает конечность группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$. Но это означает, что $\mathfrak{P}$ — специальная группа.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$. В этом случае в процессе построения групп $\mathfrak{R}_k$ и $\mathfrak{A}_k$ следует заменить множества элементов p-го порядка и их централизаторы множествами элементов четвертого порядка и их централизаторами. Далее, как и выше, определяются группы $\overline{\mathfrak{R}}$, $\overline{\mathfrak{A}}_k$ и $\{\overline{\mathfrak{R}}, \overline{A}\}$. Все элементы четвертого порядка группы $\overline{\mathfrak{R}}$ содержатся, по определению группы $\mathfrak{R}_k$, в центре группы $\{\overline{\mathfrak{R}}, \overline{A}\}$. Центр этой группы бесконечен. В самом деле, если он конечен, то в группе $\overline{\mathfrak{R}}$ содержится некоторый квази-циклический нормальный делитель $\overline{\mathfrak{L}}$ группы $\{\overline{\mathfrak{R}}, \overline{A}\}$ ([5]). Группа $\{\overline{\mathfrak{L}}, \overline{A}\}$ удовлетворяет условиям леммы 4 и потому является абелевой. Но тогда группа $\overline{\mathfrak{L}}$ должна содержаться в центре группы $\{\overline{\mathfrak{R}}, \overline{A}\}$ и, значит, он, вопреки предположению, бесконечен. Дальнейшие рассуждения не отличаются от соответствующих рассуждений, проведенных выше в случае, когда p — нечетное простое число. В результате получится доказательство необходимости условия теоремы в случае $p = 2$.

2. Теорема 3. *Если произвольная локально-конечная p-группа $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она обладает возрастающим центральным рядом.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 достаточно рассмотреть лишь случай счетной группы $\mathfrak{P}$. Центр группы $\mathfrak{P}$, очевидно, отличен от единицы. Обозначим его через $\mathfrak{Z}_1$. Фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_1$, очевидно, счетна и локально конечна и, ввиду леммы 1, удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Поэтому она обладает центром $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2 \neq \mathfrak{Z}_1$.

Пусть для всех $\beta < \alpha$ уже построена цепочка

$$\mathfrak{Z}_0 = 1 \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\beta \subset \ldots,$$

каждый фактор $\mathfrak{Z}_{\beta+1}/\mathfrak{Z}_\beta$ которой совпадает с центром фактор-группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_\beta$, причем для каждого $\beta < \alpha$ эта фактор-группа удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Тогда при α непредельном группа $\mathfrak{Z}_\alpha$ строится так же, как группа $\mathfrak{Z}_2$ в предыдущих рассуждениях, причем, ввиду леммы 1, группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_\alpha$ будет удовлетворять условию минимальности для абелевых подгрупп. Если же α — предельное порядковое число, то полагаем $\mathfrak{Z}_\alpha = \sum\limits_{\beta<\alpha} \mathfrak{Z}_\beta$. Фактор-группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_\alpha$ и в этом случае будет удовлетворять условию минимальности для абелевых подгрупп. В самом деле, пусть она не удовлетворяет этому условию. Тогда существует бесконечная абелева подгруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}_\alpha$ группы $\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_\alpha$, все отличные от единицы элементы которой имеют порядок, равный числу p. Так как ряд

$$\mathfrak{Z}_0 = 1 \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \mathfrak{Z}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\alpha \subset \mathfrak{A}$$

является возрастающим центральным рядом группы $\mathfrak{A}$, то она, ввиду леммы 5, должна быть специальной группой. Но тогда все ее подгруппы и все фактор-группы должны удовлетворять условию минимальности для своих подгрупп, что противоречит выбору группы $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}_\alpha$. Так как α — любое порядковое число и так как $\mathfrak{Z}_\alpha \neq \mathfrak{Z}_\gamma$, если $\alpha \neq \gamma$, то при некотором порядковом числе γ получим $\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}_\gamma$. Теорема доказана.

Ввиду доказанной теоремы лемма 5 превращается в следующую теорему.

Теорема 4. *Локально-конечная p-группа $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, когда она является специальной группой.*

Эту теорему можно выразить и следующим образом.

Локально-конечная p-группа тогда и только тогда имеет бесконечную убывающую последовательность подгрупп, когда она имеет бесконечную убывающую последовательность абелевых подгрупп.

Эти предложения обобщают в разных направлениях теоремы 10 и 11 работы О. Ю. Шмидта о бесконечных специальных подгруппах ([6]).

Поступило
5 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Матем. сб., 6, 199 (1939). [2] С. Н. Черников, там же, 7, 35 (1940). [3] С. Н. Черников, там же, 7, 539 (1940). [4] С. Н. Черников, там же, 18, 397 (1946). [5] С. Н. Черников, там же, 17, 105 (1945). [6] О. Ю. Шмидт, там же, 8, 363 (1940).