Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

А. М. ФОМИН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 IX 1948)

Основной результат настоящей заметки может быть формулирован в виде следующего общего предложения:

Теорема 1. *Пусть функция*

$$h(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

в области

$$|x_i - \alpha_i| \leqslant l_i + 1, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

дважды непрерывно дифференцируемая, удовлетворяет условиям:

$$h_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\frac{1}{A_i} \leqslant h_{ii}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} h(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \frac{k_i}{A_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_n, \tag{5}$$

квадратичная форма

$$\sum_{i, j=1}^{n} h_{ij}(x_1, \ldots, x_n) u_i u_j \tag{6}$$

в области (2) *определенная положительная.*

Определитель H квадратичной формы (6) *удовлетворяет неравенству*

$$s \cdot h_{11}(x_1, \ldots, x_n) \ldots h_{nn}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant H, \text{ где } 0 < s < 1. \tag{7}$$

Если при этом для данного $\eta > 0$ на границе области $|x_i - \alpha_i| \leqslant l_i$ имеет место неравенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) - h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqslant \eta, \tag{8}$$

то в области (2) *существует целая точка $(x_1, \ldots, x_n)$, в которой имеет место*

$$0 < h(x_1, \ldots, x_n) - h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \eta < \\ < \max\left(c_n'\left(\frac{\eta}{A_1^{2^{n-1}} A_2^{2^{n-2}} \ldots A_n}\right)^{2^{-n}}, \ c_n'' \frac{1}{A_n}\right), \tag{9}$$

где c_n' и c_n'' зависят только от k, s, n *; $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$.

* Значения c_n' и c_n'', а также значение N_0 в теореме 3, ввиду краткости настоящей статьи, здесь не приводятся.

В доказательстве теоремы 1 существенную роль играет следующая

Основная лемма. *Если функция $h(x_1, \ldots, x_n)$ в области* (2) *удовлетворяет всем условиям теоремы* 1 *и при этом $A_n\eta$ ограничено снизу некоторой положительной константой, зависящей только от k, s, n, то существует такая подобласть области* (2), *в которой уравнение*

$$h(x_1, \ldots, x_n) - h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \eta \tag{10}$$

определяет x_n как функцию $x_1, \ldots, x_{n-1}$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую всем условиям, аналогичным (3)—(8) *теоремы* 1.

Идея доказательства в основном сводится к следующему: используя некоторые свойства положительных квадратичных форм, можно получить оценку $|h_i(x_1, \ldots, x_n)|$ в точках, удовлетворяющих уравнению (10):

$$|h_i(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \sqrt{\frac{2k_i\eta}{A_i}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Эта оценка не может быть улучшена, так как существуют точки, удовлетворяющие (10), в которых $|h_i|$ имеет точный порядок $\sqrt{\eta/A_i}$.

Далее, из ограниченности $A_n\eta$ и (11) легко получить для точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих (10), неравенство

$$0 < h(x_1, \ldots, x_{n-1}, [x_n]) - h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \eta < c_1 \sqrt{\frac{\eta}{A_n}} \{x_n\},$$

которое, опираясь на основную лемму, дает возможность применить метод полной индукции.

Из теоремы 1 следуют такие предложения:

Теорема 2. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ в области*

$$|x_i - \alpha_i| \leqslant a_i + \sqrt{\frac{2A_i}{sM}}, \quad i = 1, \ldots n, \tag{12}$$

удовлетворяет условиям (4), (6), (7) *и при этом*

$$f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{b_i}{a_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{a_1^2}{A_1} \leqslant \frac{a_2^2}{A_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{a_n^2}{A_n},$$

где a_i — целые положительные, $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = \ldots = (a_n, b_n) = 1$, M — общее наименьшее кратное $a_1, \ldots, a_n$, то в области (12) *существует целая точка $(x_1, \ldots, x_n)$, в которой*

$$\{f(x_1, \ldots, x_n)\} < \max\left(c_n' \left(\frac{a_1^{2^n} a_2^{2^{n-1}} \ldots a_n^2}{A_1^{2^{n-1}} A_2^{2^{n-2}} \ldots A_n M}\right)^{2^{-n}}, \; c_n'' \frac{a_n^2}{A_n}\right).$$

Для доказательства достаточно убедиться, что функция

$$h(t_1, \ldots, t_n) = f(a_1 t_1 + r_1, \ldots, a_n t_n + r_n) - b_1 t_1 - \ldots - b_n t_n$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1, и надлежащим образом выбрать значение η.

Теорема 2 обобщает результат Б. И. Сегала ([1]) на функции от n переменных.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(x) > 0$ — функция, определенная для всех x, $0 < x_0 \leqslant x < \infty$, и возрастающая до бесконечности вместе с x.*

Пусть, далее, $\varphi''(x) > 0$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$, а $x\varphi''(x)$ не убывает.

Тогда существует такое N_0, что система неравенств

$$0 < \varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_r) - N < c_r \left(\frac{\varphi'(\mu)}{\varphi''(\mu)}\right)^{2^{-r+1}} \varphi''(\mu),$$

$$|x_i - \mu| < 6 r^{1/2} \sqrt{\frac{\varphi'(\mu)}{\varphi''(\mu)}}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

где

$$c_r = 2^{\frac{(r-1)3^r - (4r^2 - 4r - 5)2^{r-2} - r - 2}{2^{r-1}}} \, 3^{\frac{3^r - 1}{2^r}},$$

а μ удовлетворяет уравнению $N = r\varphi(\mu)$, разрешима в целых числах $x_1, \ldots, x_r$ при любом $N \geqslant N_0$.

Отсюда, при дополнительном условии

$$\varphi(x) = O(x^c), \text{ где } c < 2,$$

ввиду легко доказываемого неравенства

$$\left(\frac{\varphi'(\mu)}{\varphi''(\mu)}\right)^{2^{-r+1}} \varphi''(\mu) < \frac{2\varphi(\mu)}{\mu^{2-2^{-r+1}}},$$

получаем такое

Следствие. *Существует r_0, зависящее только от вида функции $\varphi(x)$, такое, что при $r \geqslant r_0$ любое $N \geqslant N_0$ может быть представлено в виде*

$$N = \delta + \varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_r),$$

где $x_1, \ldots, x_r$ целые, а

$$|\delta| < c_r \left(\frac{\varphi'(\mu)}{\varphi''(\mu)}\right)^{2^{-r+1}} \varphi''(\mu)$$

и, следовательно, $\delta \to 0$ при неограниченном росте N.

Для доказательства теоремы 3 достаточно применить теорему 1 к функции

$$h(x_1, \ldots, x_{r-1}) =$$
$$= \varphi(m + x_1) + \ldots + \varphi(m + x_{r-1}) + \varphi(m - x_1 - \ldots - x_{r-1}),$$

где m — целое, определенное условием

$$r\varphi(m+1) \leqslant N < r\varphi(m+2),$$

а η положить равным

$$\eta = N - r\varphi(m).$$

Таким образом, теорема 3 значительно улучшает результат Р. О. Кузьмина ([2]), приведенный им без доказательства, одновременно обобщая его на случай r слагаемых при более слабых условиях, накладываемых на функцию $\varphi(x)$.

1°. Полагая, в частности:

$$\varphi(x) = x^c, \text{ где } 1 < c < 2,$$

находим такой результат: существует такое N_0, что всякое $N \geqslant N_0$ может быть представлено в виде

$$N = \delta + x_1^c + \ldots + x_r^c, \tag{13}$$

где

$$r \geqslant r_0 = \left[2 - \frac{\ln(2-c)}{\ln 2}\right], \tag{14}$$

а

$$|\delta| = O\left(N^{\frac{(c-2)2^{r-1}+1}{c\,2^{r-1}}}\right)$$

и стремится к нулю при неограниченном росте N.

В работе [1] Б. И. Сегал показал, что для представления N в виде (13) при $c < {}^3/_2$ достаточно двух слагаемых.

Будем считать теперь, что ${}^3/_2 \leqslant c < 2$. Для таких c другой результат Б. И. Сегала [3] дает

$$r \geqslant r_0 = \left[\frac{6c}{3-c}\right] + 1. \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), заключаем, что для всех c с условием

$$\frac{3}{2} \leqslant c < 2 - \frac{1}{2^{10}}$$

выражение (14) дает для r_0 меньшие значения, чем (15).

Например, при $\frac{3}{2} \leqslant c < \frac{7}{4}$, согласно (14), для представления N в виде (13) достаточно трех слагаемых, тогда как из (15) для r получаются значения $6 \leqslant r \leqslant 9$.

2°. Полагая $\varphi(x) = x \log x$, заменив при этом N на $\log N$ и замечая, что величина μ в этом случае имеет точный порядок $\frac{\log N}{\log\log N}$, получим результат, формулированный Б. И. Сегалом [1]. Любое действительное $N \geqslant N_0$ может быть представлено в виде

$$N = a x_1^{x_1} \ldots x_r^{x_r},$$

где $x_1, \ldots, x_r$ — целые, $1 \leqslant a \leqslant e^\delta$,

$$\delta = O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-2^{-r+1}}}\right).$$

Поступило
9 IX 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Сегал, ДАН, 95 (1933). [2] Р. О. Кузьмин, ДАН, 9 (1933). [3] Б. И. Сегал, Ann. of Math., 36, 507 (1935).