Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. П. ТОЛСТОВ

О ПЕРЕСТАНОВКЕ ИНТЕГРИРОВАНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 IX 1948)

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $R(a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d)$. Если f суммируема в R, то для нее, в силу известной теоремы Фубини, имеет место следующее свойство, которое назовем свойством (F):

Для всякого прямоугольника $r(\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \gamma \leqslant y \leqslant \delta)$, $r \subset R$,

$$\int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f\,dy = \int_\gamma^\delta dy \int_\alpha^\beta f\,dx. \tag{1}$$

Ближайшее рассмотрение доказательств некоторых предложений анализа, где от f требуют суммируемости, показывает, что суммируемость оказывается нужной лишь для того, чтобы гарантировать справедливость свойства (F), причем принадлежность f к классу суммируемых в R функций вовсе не является необходимой. Таков, например, ряд предложений, касающихся дифференцирования интегралов по параметру, понятий полного дифференциала и криволинейного интеграла (см., например, ([1]), стр. 109—112). Давно известно, что свойство (F) может иметь место для функций, не суммируемых ни в каком прямоугольнике ([2]), или даже для неизмеримых ([3]).

С другой стороны, пусть f есть точная, смешанная, „перестановочная“ вторая производная. Иными словами, существует функция $F(x, y)$, для которой всюду в R

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = f.$$

Такая f всегда обладает свойством (F), причем линейные интегралы, фигурирующие в (1), суть, вообще говоря, интегралы в смысле Данжуа. Тогда функция

$$I(x, y) = \int_a^x dx \int_c^y f\,dy = \int_c^y dy \int_a^x f\,dx \tag{2}$$

определена всюду в R и, как легко видеть, является одной из примитивных для f, причем, a priori, от f совсем не требуется суммируемости в R или в каком-нибудь прямоугольнике, лежащем в R. Мы можем показать, что, действительно, существуют точные смешанные производные (даже от непрерывных функций), не суммируемые ни в каком прямоугольнике.

Тем самым операция, определяемая равенством (2), позволяет найти примитивную для f независимо от того, суммируема f в каком-нибудь прямоугольнике или нет.

Заметим, что плоские интегралы, рассмотренные Ломаном ([4]), Кемписты ([5]), Романовским ([6]), все отправляются от областей суммируемости и, следовательно, не приложимы к функциям, не суммируемым ни в каком прямоугольнике. Отсюда вытекает, что эти интегралы не могут решать задачу отыскания примитивных во всех случаях.

Все указанное приводит к целесообразности изучения операции интегрирования, основанной на свойстве (F).

Пусть f — какая-нибудь функция, обладающая в R свойством (F), причем линейные интегралы, вообще, суть интегралы Данжуа в широком смысле.

Назовем повторным интегралом от f по прямоугольнику R число

$$I(f;\ R)=\int_a^b dx\int_c^d f\ dy=\int_c^d dy\int_a^b f\ dx.$$

Функцию $I(x,\ y)$ (см. (2)), которая в этом случае определена для всякой точки $(x,\ y)\subset R$, назовем неопределенным повторным интегралом.

Скажем, что f повторно интегрируема на множестве E, если функция g, равная f на E и равная нулю на $R-E$, повторно интегрируема в R. При этом положим $I(f;\ E)=I(g;\ R)$.

Изучая свойства неопределенного интеграла $I(x,\ y)$, автор установил, что эта функция, вообще говоря, разрывна почти всюду в R, хотя множество ее точек непрерывности всегда второй категории во всяком прямоугольнике.

Положим

$$P(x,\ y)=\int_c^y f\,dy,\quad Q(x,\ y)=\int_a^x f\,dx,\tag{3}$$

считая, что P определена для почти всех x, $c\leqslant y\leqslant d$, Q — для почти всех y, $a\leqslant x\leqslant b$.

Необходимым и достаточным условием для повторной интегрируемости f в R, очевидно, является справедливость равенства

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=0$$

для контура всякого прямоугольника (со сторонами, параллельными осям координат), причем фигурирующий здесь криволинейный интеграл, вообще говоря, есть интеграл в смысле Данжуа.

Будем называть простой контур Γ $(x=\varphi(t),\ y=\psi(t))$ правильным, если функции φ и ψ кусочно-монотонны. Область, ограниченную правильным контуром, назовем правильной.

Т е о р е м а 1. *Для повторной интегрируемости f в каждой правильной области G, $G\subset R$, необходимо и достаточно, чтобы существовали интегралы (вообще, в смысле Данжуа)*

$$\int_C P\,dx\quad \textit{и}\quad \int_C Q\,dy\tag{4}$$

и

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = 0, \tag{5}$$

где C — контур G. При этом оказывается

$$I(f;\ G) = -\int_C P\,dx = \int_C Q\,dy$$

(контур C проходится в положительном направлении).

Заметим, что из равенства (5) не вытекает, вообще говоря, существования каждого из интегралов (4) в отдельности.

Из теоремы 1 легко следует

Теорема 2. *Если f — повторно интегрируема в каждой правильной области G, $G \subset R$, то имеет место соотношение*

$$I(x,\ y) - I(x_0,\ y_0) = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy, \tag{6}$$

где Γ — любая правильная дуга, лежащая в R и соединяющая точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x,\ y)$.

Отсюда вытекают следствия:

1. В условиях теоремы неопределенный интеграл $I(x,\ y)$ есть функция, непрерывная по совокупности переменных.

2. Существуют функции, интегрируемые повторно в R и не интегрируемые в некоторых правильных областях (так как существуют функции, для которых $I(x,\ y)$ разрывна — см. выше).

Заметим, что формула (6), вообще говоря, не имеет места для спрямляемых контуров, даже для суммируемой f.

Тем не менее, если P и Q ограничены в R (можно пренебречь значениями P и Q на множестве плоской нулевой меры), то теоремы 1 и 2 могут быть сформулированы применительно к любым простым, спрямляемым контурам и к областям, ограниченным такими контурами. В этом случае интегралы (4) всегда существуют и формулировка теоремы 1 несколько упрощается. Мало того, имеет место

Теорема 3. *Если P и Q ограничены, то из повторной интегрируемости f в R вытекает ее повторная интегрируемость во всякой области, ограниченной простым спрямляемым контуром.*

Можно показать, что существуют функции (даже точные производные) с ограниченными P и Q, повторно интегрируемые в областях указанного вида и не суммируемые ни в каком прямоугольнике.

Спросим теперь: что можно сказать о функции f, если она повторно интегрируема во всевозможных областях произвольного вида? Оказывается, если f измерима (и это существенно), то она суммируема в R.

Скажем, что P и Q допускают суммируемые мажоранты, если существуют суммируемые функции $M_1(x)$ и $M_2(y)$, для которых $|P(x,\ y)| \leqslant M_1(x)$ для почти всех x, $c \leqslant y \leqslant d$, и $|Q(x,\ y)| \leqslant M_2(y)$ для почти всех y, $a \leqslant x \leqslant b$.

Следующие предложения дают достаточные условия для повторной интегрируемости f в R.

Теорема 4. *Если P и Q непрерывны по x и по y и ограничены в R (или допускают суммируемые мажоранты — см. выше) и, за исключением, быть может, счетного множества точек, обладают конечными производными числами как по x, так и по y, то f повторно интегрируема в R.*

В частности, если P и Q ограничены и всюду обладают производными $\partial P/\partial x$, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, то f повторно интегрируема в R.

Теорема 5. *Если P и Q абсолютно непрерывны по x (при фиксированном y) и абсолютно непрерывны по y (при фиксированном x) и ограничены в R (или допускают суммируемые мажоранты), то f повторно интегрируема в R.*

Замечания. 1. В теоремах 4 и 5 можно допустить конечное число параллелей Oy, в точках которых от P ничего не требуется (аналогично для Q и параллелей Ox).

2. Существуют функции f, для которых выполнены все условия этих теорем, за исключением существования суммируемых мажорант, и повторно не интегрируемые в R.

3. При отказе от требования существования $\partial P/\partial x$ и $\partial Q/\partial x$ в теореме 4 (или от требования абсолютной непрерывности P по x и Q по y в теореме 5) можно дать пример функции, не интегрируемой повторно, для которой все прочие условия теорем выполнены.

4. Так как P и Q, вообще говоря, определены лишь почти всюду, то формулировки теорем 4 и 5 нужно понимать в том смысле, что P и Q могут быть доопределены в R так, чтобы условия теорем были выполнены.

В качестве приложений доказанных теорем укажем:

Теорема 6. *Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ограничены в R и обладают конечными производными $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ (или конечными производными числами), причем почти всюду*

$$\partial u/\partial y = \partial v/\partial x, \tag{7}$$

то существует функция $F(x, y)$, для которой

$$\partial F/\partial x = u, \qquad \partial F/\partial y = v \tag{8}$$

всюду в R.

Заметим, что Монтель ([7]) утверждал справедливость этой теоремы без требования существования $\partial u/\partial x$ и $\partial v/\partial y$. Ошибочность этого утверждения была нами установлена в работе ([8]).

Теорема 7. *Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ограничены в R и абсолютно непрерывны по x (при фиксированном y) и по y (при фиксированном x), причем почти всюду имеет место* (7), *то существует функция $F(x, y)$, для которой справедливо* (8).

Теорема 8. *Если $f(z)$ $(z = x + iy)$ измерима в области G* (это существенно) *и для всякого замкнутого, выпуклого контура C, $C \subset G$,*

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

(интеграл в смысле Лебега), то $f(z)$, с точностью до изменения на множестве плоской нулевой меры, есть функция, аналитическая в G.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
25 VIII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа, 2, 1933. [2] G. Fichtenholz, Fund. Math., **6** (1924). [3] W. Sierpinski, ibid., **1** (1920). [4] H. Looman, ibid., **4** (1923). [5] S. Kempisty, ibid., **27** (1936). [6] П. Романовский, Матем. сб., **9** (51) (1941). [7] P. Montel, C. R., **156**156 (1913). [8] Г. Толстов, Матем. сб., **9** (51) (1941).