Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН

О НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПРОДВИЖЕНИЯ ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 VIII 1948)

Скорость продвижения фронта кристаллизации в одномерной задаче Стефана [1] задана, если в начальный момент сосуществуют твердая и жидкая фазы. Если в начальный момент существует только одна жидкая фаза, начальная скорость кристаллизации подлежит определению. Знание начальной скорости кристаллизации необходимо для эффективного осуществления любого из предложенных до сих пор методов решения задачи Стефана*, за исключением метода Л. С. Лейбензона [4], дающего лишь асимптотическую картину процесса.

Определением начальной скорости кристаллизации занимался Huber [5]. Его результаты перекрываются сообщаемыми ниже.

Мы рассматриваем начальную скорость кристаллизации при условии задания на внешней границе твердой фазы температуры, потока тепла или линейного теплообмена с окружающей средой.

1. Рассматриваем задачу Стефана на полупрямой $x \geqslant 0$. Пусть $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ — температуры твердой и жидкой фаз соответственно. Вводя отсчет температур в разных шкалах, приведем уравнение задачи к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad 0 < x < y(t); \tag{1^1}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad y(t) < x < \infty, \quad t > 0; \tag{1^2}$$

$$u_1(0, t) = f_1(t) \leqslant 0; \quad u_i(y(t), t) = 0 \ (i = 1, 2); \quad u_2(x, 0) = \varphi(x) \geqslant 0; \tag{1^3}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_1(t) - v_2(t); \quad v_i(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_i(y(t), t) \ (i = 1, 2); \quad y(0) = 0. \tag{1^4}$$

Считаем, что f, φ дважды дифференцируемы при $t > 0$, $x > 0$ и, сверх того,

$$\dot{f}(t) = -c_0 t^{m_0} + c_1 t^{m_1}(1 + f^*(t)), \quad \dot{\varphi}(x) = b_0 x^{n_0} + b_1 x^{n_1}(1 + \varphi^*(x)),$$
$$\lim_{t \to 0} f^* = \lim_{x \to 0} \varphi^* = 0, \quad c_0 > 0, \quad m_0 > -1, \quad b_0 > 0, \quad n_0 > -1, \tag{1^5}$$
$$m_1 > m_0, \ n_1 > n_0.$$

* Для построения решения по методу, предложенному нами ранее [2, 3], нет необходимости знать начальную скорость кристаллизации. Тем не менее, наиболее эффективным будет задаться на малом отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant t_0$ дугой $x = z(t)$, соприкасающейся при $t = 0$ с истинной границей раздела фаз $x = y(t)$.

Согласно ([2]), $v_i(t)$ должны удовлетворять системе:

$$v_1(t) = -\frac{2f(0)}{\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{y^2(t)}{4t}\right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \dot{f}(\tau)\frac{\exp\left[-\frac{y^2(t)}{4(t-\tau)}\right]}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0 v_1(\tau)\left\{\frac{y(t)+y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{[y(t)+y(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right] -\right.$$

$$\left. -\frac{y(t)-y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right]\right\}d\tau; \qquad (2^1)$$

$$v_2(t) = \frac{\varphi(0)}{a\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{y^2(t)}{4a^2t}\right] + \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \dot{\varphi}(x)\exp\left[-\frac{[x-y(t)]^2}{4a^2t}\right]dx +$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t v_2(\tau)\frac{y(t)-y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau. \qquad (2^2)$$

Отсюда и из ([1][4]) видим, что если $f(0)\neq 0$, $\varphi(0)\neq 0$, то должно быть

$$v_1(t) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{t}}(1+v_1^*(t)); \quad v_2(t) = \frac{\beta_0}{\sqrt{t}}(1+v_2^*(t));$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{t}}(1+y^*(t)); \qquad (3^1)$$

$$\lim_{t\to 0} v_i^* = \lim_{t\to 0} y^* = 0 \quad [y(t) = 2\gamma_0\sqrt{t}\,(1+y^{**}(t))].$$

Внося (3^1) в (2^1), (2^2) и (1^4), умножая на $\sqrt{t}$ и переходя к пределу при $t\to 0$, найдем:

$$\alpha_0 = \frac{f(0)\,e^{-\gamma_0^2}}{\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}\gamma_0}, \qquad \beta_0 = \frac{\varphi(0)\,e^{-\gamma_0^2/a^2}}{a\sqrt{\pi}\left(1-\operatorname{Erf}\frac{\gamma_0}{a}\right)}, \qquad \gamma_0 = \alpha_0 - \beta_0. \qquad (3^2)$$

Если $\dot{f}\equiv 0$, $\dot{\varphi}\equiv 0$, решение задачи дается формулами (3^1), где $v_i^*\equiv y^*\equiv 0$. Это решение совпадает с известным решением, данным Стефаном ([1]).

Если $\varphi(0)=0$, но $f(0)\neq 0$, $v_i(t)$ будут иметь вид:

$$v_1(t) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{t}}(1+v_1^*(t)); \quad v_2(t) = \beta_0 t^{n_0/2}(1+v_2^*(t));$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{t}}(1+y_1^*(t)); \quad \lim_{t\to 0} v_1^*(t) = \lim_{t\to 0} v_2^*(t) = \lim_{t\to 0} y_1^*(t) = 0, \qquad (4^1)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{f(0)\,e^{-\alpha_0^2}}{\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}\alpha_0}, \quad \beta_0 = \frac{(2a)^{n_0}b_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha_0/a}^\infty\left(\frac{\gamma_0}{a}+z\right)^{n_0}e^{-z^2}dz}{1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha_0/2}\left(\frac{\alpha_0^2-a^2z^2}{\alpha_0^2+a^2z^2}\right)^{n_0+1}e^{-z^2}dz}. \qquad (4^2)$$

Пусть теперь $f(0)=0$. Простым преобразованием приведем (2) к виду:

$$\frac{v_1(t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{dy}{d\tau}\,\frac{\exp\left[-\frac{[y(t)+y(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right]+\exp\left[-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right]}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t [v_1(t)-v_1(\tau)]\left\{\frac{y(t)+y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{[y(t)+y(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{y(t)-y(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{[y(t)-y(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right]\right\}d\tau=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \dot{f}(\tau)\,\frac{\exp\left[-\frac{y^2(t)}{4(t-\tau)}\right]}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau. \tag{5}$$

В ([3]) нами показано, что $v_i(t)$ дифференцируемы по t. Ищем $v_i(t)$, $\dot{y}(t)$ в виде:

$$\begin{gathered} v_1(t)=\alpha_0 t^{\lambda_0}+\alpha_1 t^{\lambda_1}(1+v_1^*(t));\ \ v_2(t)=\beta_0 t^{\mu_0}+\beta_1(t)^{\mu_1}(1+v_2^*(t));\\ \dot{y}(t)=\gamma_0 t^{\nu_0}+\gamma_1 t^{\nu_1}(1+y^*(t));\quad \lim_{t\to 0} v_i^*(t)=\lim_{t\to 0} y^*(t)=0;\\ \lambda_1>\lambda_0,\ \ldots,\ \nu_1>\nu_0. \end{gathered} \tag{6}$$

Внося (1^5) и (6) в (5), умножая на $t^{-\left(\lambda_0+\nu_0+1/2\right)}$ и переходя к пределу при $t\to 0$, найдем:

$$\lambda_0+\nu_0=m_0,\qquad \alpha_0\gamma_0=c_0\,\frac{\nu_0+1}{m_0+1}. \tag{7^1}$$

С другой стороны, внося (1^5) и (6) в (2^2), умножая на $^{-\mu_0}$ и переходя к пределу при $t\to 0$, найдем:

$$\mu_0=-{}^1/_2,\qquad \beta_0=\varphi(0)/a\sqrt{\pi}\ \text{ при } \varphi(0)\neq 0; \tag{7^2}$$

$$\mu_0=n_0/2,\qquad \beta_0=(2a)^{n_0}b_0\Gamma\left(\frac{n_0+1}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi}\ \text{ при } \varphi(0)=0. \tag{7^3}$$

Сопоставляя (6), (1^4) и требование $y(t)\geqslant 0$ при $t\geqslant 0$, найдем $\lambda_0\leqslant\mu_0$. Отсюда следует

$$\lambda_0=\nu_0=\frac{m_0}{2};\qquad \alpha_0=\sqrt{c_0\,\frac{m_0+2}{2(m_0+1)}}\ \text{ при } m_0<n_0,\quad \varphi(0)=0;$$

$$\alpha_0=\frac{\beta_0}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\beta_0^2+2c_0\,\frac{m_0+2}{m_0+1}}\ \text{ при } m_0=n_0,\quad \varphi(0)=0; \tag{7^4}$$

$$\lambda_0=\mu_0,\quad \alpha_0=\beta_0,\quad \gamma_0=\frac{c_0}{\beta_0}\,\frac{m_0-\mu_0+1}{m_0+1},\ \text{ если } \varphi(0)\neq 0 \text{ или } m_0>n_0.$$

Случаи $f(0)\neq 0$, $\varphi(0)\neq 0$ и $\dot{f}(0)\neq 0$, $\dot{\varphi}(0)\neq 0$ разобраны Huber'ом ([5]). Остальные, насколько нам известно, рассматриваются здесь впервые.

2. Рассмотрим случаи задания при $x=0$:

A. Потока тепла:

$$\partial u_1 / \partial x|_{x=0} = f(t) = c_0 t^{m_0} (1 + f^*(t)), \quad \lim_{t \to 0} f^* = 0, \quad c_0 > 0, \ m_0 \geqslant 0.$$

B. Линейного излучения:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) - h u_1(0, t) = h f_1(t) = -h c_0 t^{m_0} (1 + f^*(t)) \ldots$$

Выписывая интегральные уравнения для определения $v_1(t)$ по методу, разработанному в ([2]), придем, после нетрудных преобразований, к равенствам

$$v_1(t) = \begin{cases} f(t) + F(t \mid f(t), f(\tau), v_1(t), v_1(\tau), y(t), y(\tau)), & \text{(A)} \\ -hf(t) + \Phi(t \mid f(t), f(\tau), v_1(t), v_1(\tau), y(t), y(\tau)), & \text{(B)} \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{v_1(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{v_1(t)} = 0 \quad \text{при} \quad \lim_{t \to 0} \frac{y(t)}{\sqrt{t}} = 0. \tag{8*}$$

Это дает:

$$v_1(t) = \begin{cases} c_0 t^{m_0} (1 + v_1^*(t)) & \text{(A)} \\ h c_0 t^{m_0} (1 + v_1^*(t)) & \text{(B)} \end{cases} \quad \lim_{t \to 0} v_1^*(t) = 0. \tag{9}$$

Считаем $\varphi(0) = 0$. Сопоставляя (9), $v_2(t)$ из (7^3), (6) и (1^4), найдем

$$dy / dt = \gamma_0 t^{\nu_0} (1 + y^*(t)), \quad y^* \to 0 \text{ при } t \to 0, \tag{9*}$$

где $\nu_0 = \min(m_0, n_0 / 2)$.

Если $m_0 \leqslant n_0 / 2$, то должны иметь:

$$\gamma_0 = c_0 \text{ при } m_0 < n_0 / 2; \quad \gamma_0 = c_0 - \beta_0 \text{ при } m_0 = n_0 / 2; \quad \text{(A)}$$

$$\gamma_0 = h c_0 \text{ при } m_0 < n_0 / 2; \quad \gamma_0 = h c_0 - \beta_0 \text{ при } m_0 = n_0 / 2. \quad \text{(B)}$$

Для того чтобы процесс кристаллизации мог начаться, т. е. чтобы при $t > 0$ было $y(t) > 0$, нужно, очевидно, чтобы было

$$m_0 \leqslant n_0 / 2; \quad c_0 - \beta_0 \geqslant 0 \text{ при } m_0 = n_0 / 2. \tag{10}$$

Если эти условия не выполнены, до начала кристаллизации будет происходить перераспределение температур внутри жидкой фазы.

Вологодский государственный
педагогический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
19 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Stefan, Sitzungsber. Keis. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Geb., **98**, 11a (1889). [2] Л. И. Рубинштейн, ДАН, **58**, № 2 (1947). [3] Л. И. Рубинштейн, ДАН, **62**, № 2 (1948). [4] Л. С. Лейбензон, Изв. АН СССР, сер. географ. и и геофиз., 625 (1935). [5] A. Huber, ZAMM, **19**, 1 (1939).