Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 6

*МАТЕМАТИКА*

Ю. СМИРНОВ

# К ТЕОРИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 VIII 1948)*

§ 1. В $T_1$-пространстве $R$ рассматриваются пары вида $(\Phi, O\Phi)$, где $\Phi$ замкнуто, а $O\Phi \supseteq \Phi$ открыто в $R$. Система $\Sigma$ пар этого вида называется плотной, если для любой пары $(\Phi, O\Phi) \in \Sigma$ существует такая окрестность $O'\Phi$ множества $\Phi$, что, обозначая квадратными скобками замыкание, имеем соотношения:

$$[O'\Phi] \subseteq O\Phi, \quad (\Phi, O'\Phi) \in \Sigma, \quad ([O'\Phi], O\Phi) \in \Sigma.$$

Сумма любого числа плотных систем есть снова плотная система, поэтому можно говорить о наибольшей плотной системе пар вида $(\Phi, O\Phi)$ данного пространства $R$; эта наибольшая система называется системой регулярности пространства $R$.

Легко доказываются теоремы:

Теорема 1. *Для того чтобы непересекающиеся непустые замкнутые множества $\Phi_0$ и $\Phi_1$ пространства $R$ были функционально отделимы в $R$ (т. е., чтобы существовала непрерывная в $R$ функция, равная 0 на $\Phi_0$ и равная 1 на $\Phi_1$), необходимо и достаточно, чтобы пара $(\Phi_0 R \setminus \Phi_1)$ была элементом системы регулярности пространства $R$.*

Теорема 2. *Для того чтобы в пространстве $R$ существовала непостоянная непрерывная функция, необходимо и достаточно, чтобы система регулярности этого пространства содержала хотя бы одну пару $(\Phi, O\Phi)$, в которой $\Phi$ непусто и $O\Phi \neq R$.*

Из теоремы 1 вытекают:

Теорема 1'. *Для того чтобы пространство $R$ было вполне регулярно (в точке $a \in R$), необходимо и достаточно, чтобы (при данном $a \in R$) всякая пара вида $(a, Oa)$ содержалась в системе регулярности пространства $R$.*

Теорема 1''. *Для того чтобы пространство $R$ было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы система регулярности этого пространства состояла из всех пар вида $(\Phi, O\Phi)$.*

Таким образом, при всей простоте понятия системы регулярности, это понятие показывает, что функциональная отделимость (а следовательно, и полная регулярность) сводится к обычной отделимости, если только потребовать, чтобы эта последняя имела место в применении к достаточно обширному классу пар вида $(\Phi, O\Phi)$. Заметим еще, что теорема 2 дает ответ на вопрос, поставленный Фреше в 1924 г.

Утверждение теоремы 1″ остается в силе, если под $Oa$ понимать не все окрестности точки $a$, а лишь окрестности, взятые из данной базы. Пользуясь этим замечанием, можно давать чрезвычайно простые, прямые доказательства полной регулярности различных пространств (обычно доказывалась возможность топологического погружения данного пространства в некоторый бикомпакт). Таким образом доказываем, например, полную регулярность известного пространства $N$ В. В. Немыцкого ((1), стр. 130, пример 2); пространство $N$ строится как окрестное пространство из точек полуплоскости $y \geqslant 0$, причем для точек $(x, y)$, не лежащих на оси абсцисс $y = 0$, берутся обычные окрестности, тогда как для точек $z = (x, 0)$ оси абсцисс определяем произвольную окрестность $Oz$, как пополненную точкой $z$ внутренность любого круга, лежащего в полуплоскости $y \geqslant 0$ и касающегося в данной точке $z$ оси абсцисс.

§ 2. В своих работах по теории размерности П. С. Александров (2) широко пользуется двумя следующими свойствами нормальных пространств $R$:

1°. Всякое замкнутое $G_\delta$-множество пространства $R$ является множеством всех нулей некоторой непрерывной во всем пространстве $R$, ограниченной, неотрицательной функции.

2°. Каково бы ни было замкнутое в $R$ множество $\Phi$ и его окрестность $O\Phi$, существует замкнутое $G_\delta$-множество $\Phi_0$, удовлетворяющее условию $\Phi \subseteq \Phi_0 \subseteq O\Phi$.

Легко доказывается

Теорема 3. *Совокупность двух свойств 1° и 2° выражает не только необходимое, но и достаточное условие для того, чтобы данное пространство было нормально.*

В то же время ни одно из этих условий, взятых порознь, не достаточно для нормальности пространства: существуют вполне регулярные, но ненормальные пространства, удовлетворяющие одному произвольно выбранному из условий 1°, 2°. Так, если мы возьмем топологическое произведение пространства всех порядковых чисел $\leqslant \Omega$ и пространства всех порядковых чисел $\leqslant \omega$ и удалим из этого пространства точку $(\Omega, \omega)$, то получим (впервые построенное А. Н. Тихоновым (3)) вполне регулярное, ненормальное пространство $T$, в котором выполнено условие 1°. С другой стороны, в пространстве $N$ Немыцкого всякое замкнутое множество есть множество типа $G_\delta$, но не всякое замкнутое множество является в нем множеством всех нулей некоторой непрерывной функции.

Именно, имеет место следующее предложение:

Теорема 4. *Для того чтобы замкнутое множество $\Phi$ пространства Немыцкого было множеством всех нулей некоторой непрерывной во всем этом пространстве функции, необходимо и достаточно, чтобы множество лежащих на оси абсцисс точек множества $\Phi$ было множеством типа $G_\delta$ в обычной топологии числовой прямой.*

Доказательство этого предложения опирается на следующий факт.

Теорема 4′. *Если произвольную непрерывную в пространстве Немыцкого функцию рассматривать лишь на оси абсцисс, то на числовой прямой получим функцию класса $\leqslant 1$; обратно, всякая функция класса $\leqslant 1$, заданная на числовой прямой, может быть продолжена в функцию, непрерывную во всем пространстве Немыцкого.*

Заметим, что пространство Немыцкого является примером вполне регулярного, ненормального пространства, построенным без применения трансфинитных чисел.

Что касается любых $T_1$-пространств, то имеет место теорема:

Теорема 5. *Для того чтобы замкнутое множество* $\Phi$ *пространства* $R$ *было множеством всех нулей некоторой непрерывной в* $R$ *функции, необходимо и достаточно, чтобы множество* $\Phi$ *можно было бы представить в виде пересечения счетного числа открытых множеств* $\Gamma_n$ *таких, что все пары* $(\Phi, \Gamma_n)$ *содержатся в системе регулярности пространства* $R$.

При исследовании пространств $T$ и $N$ приходится пользоваться следующим предложением, представляющим собой усиление классической теоремы Урысона:

Теорема 6. *Пусть* $\Phi$ — *замкнутое множество нормального пространства* $R$. *Для того чтобы неотрицательная функция* $f$, *определенная и непрерывная на* $\Phi$, *могла быть продолжена в непрерывную на всем пространстве* $R$ *функцию* $F$, *не обращающуюся в нуль нигде вне множества* $\Phi$, *необходимо и достаточно, чтобы множество* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *всех нулей функции* $f$ *было множеством типа* $G_\delta$ *в* $R$.

Замечание. Предположение, что функция $f$ неотрицательна, очевидно, существенно (даже для случая, когда $R$ есть отрезок числовой прямой, а $\Phi$ — множество, состоящее из двух его концов).

Заметим, с другой стороны, что легко построить нормальное пространство $R$, замкнутое множество $\Phi$ и замкнутое множество $\Phi_0 \subset \Phi$, являющееся множеством типа $G_\delta$ относительно $\Phi$, но не относительно $R$. Наконец, если $\Phi$ есть замкнутое $G_\delta$-множество в нормальном пространстве $R$, то утверждение теоремы 6 верно без каких-либо предположений о множестве $\Phi_0$.

Наметим доказательство теоремы 6 (в предположении ограниченности функции $f$). Сначала рассматривается случай, когда множество $\Phi_0$ пусто. Известная конструкция Урысона позволяет продолжить функцию $f$ в функцию $f_0$, непрерывную в $R$ и неотрицательную. Обозначая через $\Phi^0$ множество нулей функции $f_0$, получим на $\Phi^0 \cup \Phi$ непрерывную функцию $g$, если положим $g(x) = f(x)$ на $\Phi$ и $g(x) = 1$ на $\Phi^0$. Продолжим $g$ в неотрицательную функцию $g_0$, непрерывную на $R$. Функция $F(x) = \frac{1}{2}(f_0(x) + g_0(x))$ есть искомая. Пусть теперь на $\Phi$ дана непрерывная неотрицательная функция $f$, множество нулей которой есть множество $\Phi_0$ типа $G_\delta$ в $R$. Тогда $\Phi_0 = \bigcap_{n=1} \Gamma_n$, где $\Gamma_n$ открыты в $R$. Положим $\Phi_n = R \setminus \Gamma_n$. Так как функция $f$ положительна на замкнутом множестве $\Phi_n \cap \Phi$ нормального пространства $\Phi_n$ $(n \geqslant 1)$, то ее, по доказанному, можно продолжить в положительную непрерывную на $\Phi_n$ функцию $\varphi_n$. Функция $f_n$, равная $f$ на $\Phi$ и равная $\varphi_n$ на $\Phi_n$, непрерывна на замкнутом множестве $\Phi \cup \Phi_n$. Продолжим ее в неотрицательную функцию $F_n$, непрерывную во всем пространстве $R$. Так как функции $F_n$ могут быть предположены ограниченными в совокупности, то функция $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} F_n(x)$ непрерывна в $R$ и, как легко видеть, удовлетворяет всем поставленным требованиям.

§ 3. В заключение покажем, как, имея какое-нибудь вполне регулярное, ненормальное пространство $R$, построить регулярное, но не вполне регулярное пространство. Это делается применением одного построения А. Н. Тихонова ([3]) следующим образом.

Возьмем в $R$ два непересекающиеся не отделимые между собой замкнутые множества $F$ и $\Phi$. Возьмем счетное число экземпляров $R_n^*$ пространства $R$ и отметим в каждом из них множества $F_n^*$ и $\Phi_n^*$, соответствующие множествам $F$ и $\Phi$. Склеим теперь множество $F_{2i-1}$ с множеством $F_{2i}$, а множество $\Phi_{2i}$ с множеством $\Phi_{2i+1}$. Сделав это для любого $i = 1, 2, 3, \ldots$, получим пространство $S' = \bigcup_n R_n$, где $R_n$ есть топологический образ $\overset{*}{R}_n$ (следовательно и $R$), $R_{2i-1} \cap R_{2i} = F_{2i}$, $R_{2i} \cap R_{2i+1} = \Phi_{2i+1}$, причем $F_{2i}$ есть результат склеивания $\overset{*}{F}_{2i-1}$ и $\overset{*}{F}_{2i}$ и гомеоморфно $F$, а $\Phi_{2i+1}$ есть результат склеивания $\overset{*}{\Phi}_{2i}$ и $\overset{*}{\Phi}_{2i+1}$ и гомеоморфно $\Phi$. Присоединим к пространству $S'$ новую точку $\xi$, определив ее окрестности $U_n\xi$ с помощью равенств $U_n\xi = \xi \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} R_k\right) \setminus R_n$. Легко видеть, что пространство $S'$ вполне регулярно, а $S = S \cup \xi$ регулярно. Однако $S$ не вполне регулярно в точке $\xi$, в чем проще всего убедиться, доказав, что пара $(\xi, S \setminus \Phi_1)$ не может быть включена ни в какую плотную систему. Взяв в качестве исходного пространства $R$, например, пространство Немыцкого, получим пример регулярного, не вполне регулярного пространства, построенный без применения трансфинитных чисел.

Поступило
25 VIII 1948

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М. — Л., 1937. [2] П. Александров, ДАН, **26**, № 7 (1940). [3] A. Tychonoff, Math. Ann., **102**, 544 (1929).