Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 6

МАТЕМАТИКА

А. И. МАЛЬЦЕВ

О НОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 VIII 1948)

В нашей заметке, печатающейся в другом месте, изучено соответствие между нильпотентными алгебрами Ли над полем рациональных чисел и абстрактными дивизионно полными нильпотентными группами без элементов конечного порядка *. Там же указано, что это соответствие можно распространить и на более широкий класс обобщенно-нильпотентных алгебр и групп. В настоящей заметке такое распространение фактически проводится. При этом оказывается естественным вместо абстрактных групп и алгебр рассматривать топологические группы и нормированные алгебры.

Соответствие между нормированными алгебрами Ли над полем вещественных чисел и принадлежащими им локальными группами было изучено Биркгофом [1]. Аналогичная задача для полей p-адических чисел в линейном случае решена Хуком [3] и в общем виде Дынкиным. В этих работах существенно, что основное поле содержит элементы с нееденичной нормой. В нашем случае основное поле имеет дискретную топологию. Благодаря этому вместо обычных предельных переходов приходится сводить дело к случаю чисто дискретных алгебр и групп, указанному выше. В отличие от полей вещественных и p-адических чисел, соответствие получается между алгебрами и группами в целом.

§ 1. R-алгебры. Алгебру $\mathfrak{L}$ над полем рациональных чисел мы условимся называть R-алгеброй, если каждому ее элементу a поставлено в соответствие вещественное число $\| a \|$, обладающее свойствами:

$$1)\ 0 < \| a \| \leqslant 1/4,\quad a \neq 0;\quad 2)\ \| a + b \| \leqslant \max\ (\| a \|,\ \| b \|);$$
$$3)\ \| \alpha a \| = \| a \|;\quad 4)\ \| ab \| \leqslant \| a \| \cdot \| b \|,$$

и если $\mathfrak{L}$ полна относительно метрики $\rho(a, b) = \| a - b \|$. Обозначим через $\mathfrak{L}_m$ совокупность элементов, норма которых не превосходит 4^{-m}. Из условий 1—4 непосредственно видно, что $\mathfrak{L}_m$ идеал в $\mathfrak{L}$, являющийся одновременно открытым и замкнутым, и $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_m \subset \mathfrak{L}_{m+1}$, $\mathfrak{L}_m\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}_{m+1}$. Алгебры вычетов $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{L} / \mathfrak{L}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ являются нильпотентными алгебрами с дискретной топологией над полем рациональных чисел. Естественные гомоморфизмы $\mathfrak{L} \to \mathfrak{A}_m$ порождают цепочку гомоморфизмов

$$\{0\} = \mathfrak{A}_1 \leftarrow \mathfrak{A}_2 \leftarrow \mathfrak{A}_3 \leftarrow \ldots \tag{1,1}$$

Обратно, пусть задана цепочка гомоморфизмов (1,1) произвольных абстрактных нильпотентных алгебр над полем рациональных чисел.

---

* Дивизионно полными здесь называются группы, в которых уравнение $x^m = g$ $(m > 0)$ имеет решение при любом g.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{B}$, элементами которой являются последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ $(a_m \in \mathfrak{A}_m,\ a_m \leftarrow a_{m+1},\ m = 1, 2, \ldots)$, действия над которыми сводятся к соответственным действиям над компонентами a_m. Обозначим через $\mathfrak{B}_m$ ядро гомоморфного отображения $\mathfrak{B}_m \to \mathfrak{A}_m$. Идеалы $\mathfrak{B}_m$ не возрастают и пересечение их состоит из нуля. Из нильпотентности алгебр $\mathfrak{A}_m$ следует, что последовательность $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}_2 \supset \ldots$ можно уплотнить новыми идеалами так, чтобы получилась последовательность

$$\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}_2 \supset \mathfrak{C}_3 \supset \ldots,$$

для которой при любом m имеют место включения $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_m \subset \mathfrak{C}_{m+1}$, $\mathfrak{C}_m \mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}_{m+1}$. Введем в алгебру $\mathfrak{B}$ норму, полагая $\|0\| = 0$ и $\|b\| = 2^{-2^n}$, если $b \in \mathfrak{C}_n$, $b \overline{\in} \mathfrak{C}_{n+1}$. Условия 1—4, очевидно, выполняются. Например, проверим последнее из них. Пусть $\|a\| = 2^{-2^m}$, $\|b\| = 2^{-2^n}$, $m \leqslant n$. Так как $b \in \mathfrak{C}_n$, то $ab \in \mathfrak{C}_{n+1}$ и

$$\|ab\| \leqslant 2^{-2^{n+1}} \leqslant 2^{-2^n - 2^m} = \|a\| \cdot \|b\|.$$

Так же легко проверяется и полнота $\mathfrak{B}$. Алгебру $\mathfrak{B}$ мы условимся называть нормированным пределом цепочки (1,1).

Возвратимся к первоначальной алгебре $\mathfrak{L}$. В этой алгебре выделена цепочка идеалов $\mathfrak{L}_m$ и построена последовательность гомоморфизмов (1,1). Отображение $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L} / \mathfrak{L}_m$ каждому элементу $a \in \mathfrak{L}$ относит в качестве соответствующего некоторый элемент $a_m \in \mathfrak{A}_m$. Тем самым каждому элементу $a \in \mathfrak{L}$ оказывается поставленной в соответствие последовательность $a_1, a_2, \ldots$, являющаяся элементом предела $\mathfrak{B}$ цепочки (1,1). Мы получили отображение алгебры $\mathfrak{L}$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Оно является, как легко видеть, топологическим изоморфизмом между $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{B}$. Следовательно, *R-алгебры и только они являются пределами цепочек обратных гомоморфизмов нильпотентных алгебр с дискретной топологией.* Воспользовавшись понятием апроксимации, обычным в теории непрерывных групп, можно так же сказать, что R-алгебры и только они апроксимируемы с любой степенью точности дискретными нильпотентными алгебрами.

§ 2. R-группы. Топологическая полная группа G будет называться R-группой, если в G существует цепочка замкнутых и, одновременно, открытых нормальных делителей

$$G = G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$$

таких, что пересечение их равно 1, для любого m $(G, G_m) \subset G_{m+1}$ и все фактор-группы G_m / G_{m+1} дивизионно полны и не содержат элементов конечного порядка. При соблюдении этих условий фактор-группы $G / G_m = H_m$ будут дискретными нильпотентными дивизионно полными группами без элементов конечных порядков. Естественные гомоморфизмы $G \to H_m$ порождают цепочку обратных гомоморфизмов

$$H_1 \leftarrow H_2 \leftarrow H_3 \leftarrow \ldots, \qquad (2,1)$$

и топологический предел этой цепочки изоморфен G (см. [2]).

Обратно, если дана последовательность гомоморфизмов дискретных нильпотентных дивизионно полных групп (2,1) без элементов конечных порядков, то ее топологический предел есть R-группа, так как содержит цепочку нормальных делителей, удовлетворяющих перечисленным выше условиям.

§ 3. Алгебры Ли R-групп. Рассмотрим некоторую R-алгебру $\mathfrak{L}$, являющуюся алгеброй Ли. Введем по обычному правилу для элементов $\mathfrak{L}$ новую операцию

$$a * b = \log(e^a e^b) = F(a, b), \qquad (3,1)$$

где $F(a, b)$ так называемый ряд Кэмпбелла — Хаусдорфа. Число членов степени n в этом ряде не превосходит, очевидно, 2^n. Каждый член по норме не более 4^{-n}. Поэтому ряд (3,1) сходится абсолютно для любых a, b из $\mathfrak{L}$ и определяет в $\mathfrak{L}$ ассоциативную операцию. Относительно этой операции $\mathfrak{L}$ является топологической группой, которую мы будем называть принадлежащей алгебре $\mathfrak{L}$.

Из формулы (3,1) непосредственно видно, что замкнутые подалгебры и идеалы алгебры $\mathfrak{L}$ будут замкнутыми, дивизионно полными подгруппами и, соответственно, нормальными делителями принадлежащей $\mathfrak{L}$ группы. В частности, отсюда следует, что *принадлежащая алгебре $\mathfrak{L}$ группа является R-группой*.

A. Пусть H — некоторая замкнутая, дивизионно полная подгруппа группы G, принадлежащей алгебре $\mathfrak{L}$. Покажем, что *H является подалгеброй алгебры* $\mathfrak{L}$. Рассмотрим идеалы $\mathfrak{L}_m$, образованные элементами с нормами, не превосходящими 4^{-m}. Обозначив через $\mathfrak{A}_m$ алгебру вычетов $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_m$ и, одновременно, фактор-группу $G/\mathfrak{L}_m$, мы сможем представить $\mathfrak{L}$ и G как предел цепочки гомоморфизмов

$$\mathfrak{A}_1 \leftarrow \mathfrak{A}_2 \leftarrow \ldots \leftarrow \mathfrak{A}_m \leftarrow \ldots$$

Пусть $\dot{\mathfrak{A}}_m$ есть образ подгруппы H в $\mathfrak{A}_m$ при гомоморфизме $G \to \dot{\mathfrak{A}}_m$. Так как H дивизионно полна, то ее образ $\dot{\mathfrak{A}}_m$ будет также дивизионно полной подгруппой в группе $\mathfrak{A}_m$. Но группа $\mathfrak{A}_m$ принадлежит дискретной нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{A}_m$ над полем рациональных чисел. В силу ([2]) отсюда следует, что $\dot{\mathfrak{A}}_m$ будет подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_m$. Из замкнутости H вытекает, что H является пределом цепочки

$$\dot{\mathfrak{A}}_1 \leftarrow \dot{\mathfrak{A}}_2 \leftarrow \dot{\mathfrak{A}}_3 \leftarrow \ldots,$$

следовательно, H будет подалгеброй и в $\mathfrak{L}$. Аналогичные рассуждения показывают также, что всякий замкнутый, дивизионно полный нормальный делитель G есть замкнутый идеал алгебры $\mathfrak{L}$.

B. *Каждая R-группа принадлежит некоторой R-алгебре Ли.* Пусть G заданная R-группа. Представим ее в виде предела последовательности обратных гомоморфизмов

$$H_1 \leftarrow H_2 \leftarrow H_3 \leftarrow \ldots, \tag{3,2}$$

где H_m — дискретные, нильпотентные, дивизионно полные группы без элементов конечного порядка. Из элементов H_m можно построить нильпотентную алгебру Ли над полем рациональных чисел; при этом групповой гомоморфизм между группами H_{m+1} и H_m будет и алгебраическим. Цепочку (3,2) можно рассматривать как цепочку гомоморфизмов алгебр. Нормированный предел ее состоит формально из тех же элементов, что и группа G. Операция группового умножения проекций a_m, b_m любых двух элементов a, b из G связана с операциями сложения и коммутирования этих проекций формулой (3,1). Поэтому той же формулой будут связаны и сами элементы a, b в алгебре и группе G, т. е. группа G принадлежит алгебре G.

C. *Если принадлежащие R-алгебрам Ли $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ группы G_1, G_2 топологически изоморфны, то алгебры $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ также топологически изоморфны.*

Алгебру Ли $\mathfrak{L}_1$ мы будем считать определенной на множестве элементов группы G_1. Аналогично, элементами $\mathfrak{L}_2$ можно считать элементы G_2. Мы хотим показать, что топологический изоморфизм между группами G_1, G_2 будет изоморфизмом (может быть, меняющим норму) и между алгебрами $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$. По условию группа G_1 содержит систему замкнутых и открытых дивизионно полных нормальных делителей $G_{11} \supset G_{12} \supset \ldots$ с равным единице пересечением и нильпотентными фактор-группами G_1 / G_{1m} $(m = 1, 2, \ldots)$. Обозначим через G_{2m} нормальный делитель группы G_2, отвечающий подгруппе G_{1m}. Согласно А, G_{1m} и G_{2m} идеалы в алгебрах $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$. Фактор-группы G_1 / G_{1m}, G_2 / G_{2m} принадлежат алгебрам $\mathfrak{L}_1 / G_{1m}$, $\mathfrak{L}_2 / G_{2m}$. Так как последние дискретны и нильпотентны, то групповой изоморфизм между G_1 / G_{1m} и G_2 / G_{2m} является в то же время изоморфизмом между алгебрами $\mathfrak{L}_1 / G_{1m}$ и $\mathfrak{L}_2 / G_{2m}$. Итак, соответствие между $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ обладает тем свойством, что оно с любой степенью точности сумму и произведение элементов из $\mathfrak{L}_1$ переводит в сумму и произведение соответственных элементов $\mathfrak{L}_2$. Согласно предположению, это соответствие непрерывно. Следовательно, оно является изоморфизмом между $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$.

§ 4. R-пополнения. Отбросив в определении R-групп требование полноты и требование, чтобы фактор-группы G_{m+1} / G_m были дивизионно полными, но оставив условие, чтобы эти фактор-группы не содержали элементов конечного порядка, мы придем к несколько более широкому классу групп, которые условимся называть R_0-группами. Согласно определению, в каждой R_0-группе G найдется система открытых и замкнутых нормальных делителей $G \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$ с единичным пересечением и нильпотентными фактор-группами $G / G_i = H_i$, не содержащими элементов конечного порядка. Рассмотрим цепочку естественных гомоморфизмов $H_1 \leftarrow H_2 \leftarrow \ldots$ Каждую группу H_i можно включить в минимальную дивизионно полную нильпотентную группу H_i^*. Гомоморфизмы $H_i \leftarrow H_{i+1}$ однозначно распространяются в гомоморфизмы $H_i^* \leftarrow H_{i+1}^*$. Пусть G^* есть предел последовательности $H_1^* \leftarrow H_2^* \leftarrow \ldots$ Очевидно, G^* содержит G в качестве своей подгруппы и, таким образом, *всякая R_0-группа может быть погружена в некоторую R-группу*.

Например, пусть G свободная абстрактная группа. Обозначим через $G^1 = G$, G^2, $G^3, \ldots$ ее нижний центральный ряд. Беря $G^1, G^2, \ldots$ в качестве полной системы окрестностей единицы, мы обратим G в топологическую R_0-группу. Наконец, указанным выше способом мы можем погрузить G в R-группу G^*. Принадлежащая группе G^* алгебра Ли $\mathfrak{L}^*$ строится следующим образом. Берем свободную алгебру Ли $\mathfrak{L}$ над полем рациональных чисел того же ранга, что и группа G. Систему идеалов $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L}^3, \ldots$ принимаем в качестве окрестностей нуля $\mathfrak{L}$. Пополнение топологизированной алгебры $\mathfrak{L}$ и будет алгеброй $\mathfrak{L}^*$ группы G^*.

В заключение отметим, что R-группы могут быть охарактеризованы еще следующим путем. Условимся произвольную группу G называть R-нормированной, если каждому элементу $g \in G$ поставлено в соответствие вещественное число $\| g \|$, удовлетворяющее требованиям: 1) $\| g \| = \| g^m \| \leqslant 1/2$ $(g \neq e, \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$; 2) $\| gh \| \leqslant \max(\| g \|, \| h \|)$; 3) $\| ghg^{-1}h^{-1} \| \leqslant \| g \| \cdot \| h \|$; 4) G полна относительно метрики $\rho(g, h) = \| gh^{-1} \|$; 5) G дивизионно полна. Ясно, что всякая R-группа может быть R-нормирована. Обратно, множество G_i элементов R-нормированной группы G, нормы которых не превосходят 2^{-i}, является нормальным делителем G. Эти нормальные делители удовлетворяют требованиям § 2 и, таким образом, классы R-групп и R-нормируемых групп совпадают.

Поступило
25 VIII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 43, 61 (1938). [2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М.—Л., 1938. [3] R. Hooke, Ann. of Math., 43, 641 (1942).