Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 6

МАТЕМАТИКА

К. А. КАРПОВ

# К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ АНАЛИЗА НА ТАБУЛЯТОРАХ ВЕРТИКАЛЬНО-ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 VIII 1948)*

Среди проблем, стоящих перед автоматизацией численного решения задач анализа, Л. А. Люстерник [1,2] поставил проблему о выделении задач, эффективно решаемых на суммирующих машинах — табуляторах. В настоящей статье рассматриваются некоторые из таких задач, причем предполагается, что их решение выполняется на табуляторах вертикально-горизонтального действия (полуавтоматы типа „Астра“, перфорационные [3] и электронные табуляторы).

При решении этого вопроса будем пользоваться следующим методом. Пусть на счетчики машины заданы начальные данные. Задаваясь определенным видом работы табулятора, будем вычислять показания счетчиков и, исходя из этого, будем указывать те задачи, которые могут быть решены табулятором при данном виде работы. Примеры такого изучения возможностей табулятора имеются в работах И. Я. Акушского [4,5] *.

Перенумеруем счетчики табулятора: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ (для определенности положим $n=2q$). Пусть в эти счетчики введены соответственно начальные данные $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Зададимся следующим видом работы табулятора.

1-й ход. Число, стоящее в каждом четном счетчике, передается в нечетный счетчик с номером, на единицу меньшим, и на фиксирующий механизм, что обозначим: $\sigma_2 \to \sigma_1$, $\sigma_4 \to \sigma_3, \ldots, \sigma_n \to \sigma_{n-1}$.

2-й ход. Число, стоящее в каждом нечетном счетчике, передается в четный счетчик с номером, на единицу меньшим, и на фиксирующий механизм, что обозначим: $\sigma_3 \to \sigma_2$, $\sigma_5 \to \sigma_4, \ldots, \sigma_{n-1} \to \sigma_{n-2}$.

Совокупность указанных двух ходов машины назовем циклом. Теперь вычислим показания каждого из счетчиков после $k$ циклов. Будем их обозначать $N_i^k$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $k=0, 1, 2, \ldots$), где верхний индекс указывает номер цикла, а нижний — номер счетчика. $k=0$ отражает показания счетчиков перед первым циклом, а потому $N_i^0=a_i$.

Так как каждый цикл начинается с передачи показаний четных счетчиков в нечетные, то в последние при каждом цикле поступают из четных счетчиков те результаты, которые в них имелись в итоге предыдущего цикла. В четные же счетчики из нечетных будут поступать те результаты, которые в них накапливаются в данном цикле.

* См. также аннотации 99 и 100 в [6].

Таким образом будем иметь: $N_n^k = a_n = c_k^0 a_n$, так как в $\sigma_n$ никакие данные не поступают.

$n-1$ число нечетное, следовательно ($c_0^0$ принимаем равным 1):

$$N_{n-1}^k = a_{n-1} + \sum_{k'=0}^{k-1} N_n^{k'} = c_k^0 a_{n-1} + c_k^1 a_n;$$

$n-2$ число четное, а потому:

$$N_{n-2}^k = a_{n-2} + \sum_{k'=1}^{k} N_{n-1}^{k'} = c_k^0 a_{n-2} + c_k^1 a_{n-1} + c_{k+1}^2 a_n;$$

$n-3$ нечетное, поэтому:

$$N_{n-3}^k = a_{n-3} + \sum_{k'=0}^{k-1} N_{n-2}^{k'} = c_k^0 a_{n-3} + c_k^1 a_{n-2} + c_k^2 a_{n-1} + c_{k+1}^3 a_n.$$

Методом индукции приходим к следующим формулам.

Пусть $p$ (число работающих счетчиков, предшествующих данному) имеет вид $p=2l-1$. Тогда в нечетном счетчике $\sigma_{n-p}$ после $k$ циклов будет получено число:

$$N_{n-p}^k = a_{n-p} + \sum_{m=0}^{\frac{p-3}{2}} \left(c_{k+m}^{2m+1} a_{n-p+2m+1} + c_{k+m}^{2m+2} a_{n-p+2m+2}\right) +$$

$$+ c^{p}_{k+\frac{p-1}{2}} a_n. \tag{1}$$

Если $p=2l$, тогда в четном счетчике $\sigma_{n-p}$ после $k$ циклов будем иметь:

$$N_{n-p}^k = \sum_{m=0}^{\frac{p-2}{2}} \left(c_{k+m}^{2m} a_{n-p+2m} + c_{k+m}^{2m+1} a_{n-p+2m+1}\right) + c^{p}_{k+\frac{p}{2}} a_n. \tag{2}$$

Распространим (1) и (2) на случай $n$ нечетного. Для этого положим $a_n=0$. Фактически это означает, что $\sigma_n$ является неработающим счетчиком. При этих предположениях счетчик $\sigma_{n-p}$ будет занумерован $\sigma_{(n-1)-(p-1)}$, где $n-1$ — число нечетное, а $p-1$ для нечетных счетчиков — четное (т. е. для формулы (1)) и нечетное для четных счетчиков (для формулы (2)). В формулах (1) и (2) исчезнут последние слагаемые. Полагая в них $n-1=n'$, $p-1=p'$ и опуская штрихи, получим формулы для случая нечетного $n$.

Для нечетных счетчиков будем иметь:

$$N_{n-p}^k = a_{n-p} + \sum_{m=0}^{\frac{p-2}{2}} \left(c_{k+m}^{2m+1} a_{n-p+2m+1} + c_{k+m}^{2m+2} a_{n-p+2m+2}\right), \tag{1'}$$

а для четных:

$$N_{n-p}^k = \sum_{m=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(c_{k+m}^{2m} a_{n-p+2m} + c_{k+m}^{2m+1} a_{n-p+2m+1}\right). \tag{2'}$$

Прежде всего заметим, что в нечетных счетчиках (1) и (1') коэффициенты, стоящие перед начальными данными, имеют вид коэффициентов 1-й интерполяционной формулы Гаусса, построенной для вычисления значений полинома $P(x)$ в точках $x_0 + xh$, где $h$ — шаг, при котором вычислялись разности полинома, $x_0$ — начальное значение аргумента и $k$ принимает последовательно значения 1, 2, 3, ... Коэффициенты перед начальными данными в четных счетчиках (2) и (2') имеют вид коэффициентов 2-й интерполяционной формулы Гаусса, построенной для той же цели.

Следовательно, если положить $a_1 = P(x_0)$, $a_i = \Delta^{1-i} P\left(x_{-\frac{i-2}{2}}\right)$ $(i=2, 4, 6, \ldots)$ и $a_i = \Delta^{i-1} P\left(x_{-\frac{i-1}{2}}\right)$ $(i=3, 5, \ldots)$, где $P(x)$ — полином степени $n-1$ (четной или нечетной), а $\Delta^{i-1} P(x_{-l})$ — его соответствующие разности, вычисленные при шаге $h$, то $N_1^k = P(x_0 + kh)$ (вычисление идет по 1-й формуле Гаусса); $N_2^k = \Delta P(x_0 + kh)$ (вычисление идет по 2-й формуле Гаусса); $N_3^k = \Delta^2 P[x_0 + (k-1)h]$, $N_4^k = \Delta^3 P[x_0 + (k-1)h], \ldots, N_n^k = \Delta^{n-1} P(x) = \text{const}$. В $\sigma_{n-1}$ из $\sigma_n$ все время поступает постоянное число $\Delta^{n-1} P(x)$. Но задание постоянных величин в счетчики табулятор может выполнять с помощью специального устройства — импульсатора, а поэтому нет надобности для последней разности занимать счетчик.

Итак, $k$-кратное повторение описанного двухходового цикла работы $n$-счетчикового табулятора, при однократном задании соответствующих начальных данных, вычисляет и фиксирует значения полинома $P(x)$ степени $n$ и всех его разностей в точках $x_0 + kh$ при произвольном $h > 0$ и $k$, последовательно равном 1, 2, 3, ...

Без приведения выкладок укажем, что описанный цикл позволяет вести вычисление полинома и его разностей и в точках $x_0 - kh$. Вычисление полиномов степени выше $n$ (число счетчиков машины) не представляет затруднения.

Рассмотрим применение описанной работы табуляторов к вычислению повторных интегралов. Пусть требуется вычислить

$$\int_a^x f(y)\,dy, \int_a^x\int_a^x f(y)\,dy^2, \int_a^x\int_a^x\int_a^x f(y)\,dy^3 \text{ и } \int_a^x\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(y)\,dy^4,$$

где $x \leqslant b$.

Вычисление интегралов будем проводить по формуле средних прямоугольников. Выбираем шаг $h$, который гарантирует требуемую точность и дает возможность подойти ко всем необходимым значениям $x$. Для определенности положим, что $f(y)$ с необходимой точностью представима в $[a, b]$ полиномом 3-й степени $P(y)$. Расчет ведется на 8-счетчиковом табуляторе.

В качестве начальных данных зададим:

$$a_i = 0 \ (i = 1, 2, 3, 4), \quad a_5 = P(y_{-1}) = P_{-1}, \quad a_6 = \Delta P(y_{-1}) = \Delta P_{-1},$$

$$a_7 = \Delta^2 P(y_{-2}) = \Delta^2 P_{-2}, \quad a_8 = \Delta^3 P(y) = \Delta^3 P = \text{const},$$

где $y_{-1} = a - \frac{h}{2}$, а разности вычислены при шаге $h$.

Тогда в результате $k$-го цикла будем иметь:

| 1-й счетчик | 2-й | 3-й | 4-й | 5-й | 6-й | 7-й | 8-й |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum\limits_{m=0}^{s=k-3}\sum\limits_{l=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{l}\sum\limits_{i=0}^{j}P_i$ | $\sum\limits_{l=0}^{m=k-2}\sum\limits_{j=0}^{l}\sum\limits_{i=0}^{j}P_i$ | $\sum\limits_{j=0}^{l=k-2}\sum\limits_{i=0}^{j}P_i$ | $\sum\limits_{i=0}^{j=k-1}P_i$ | $P_{k-1}$ | $\Delta P_{k-1}$ | $\Delta^2 P_{k-2}$ | $\Delta^3 P$ |

Если результаты $k$-го цикла 4-го, 3-го, 2-го и 1-го счетчиков умножить соответственно на $h$, $h^2$, $h^3$ и $h^4$, то соответственно получим:

$$\int\limits_a^{a+(k-1)h} f(y)\,dy, \quad \int\limits_a^{a+(k-2)h}\int\limits_a^{x} f(y)\,dy^2, \quad \int\limits_a^{a+(k-2)h}\int\limits_a^{x}\int\limits_a^{x} f(y)\,dy^3,$$

$$\int\limits_a^{a(+k-3)h}\int\limits_a^{x}\int\limits_a^{x}\int\limits_a^{x} f(y)\,dy^4.$$

Учитывая замечание, сделанное выше, можно утверждать, что мы не связаны в вычислениях ни степенью приближающего функцию $f(y)$ полинома, ни кратностью интегралов, которые нужно вычислить.

Л. А. Люстерник показал ([2,6]), что вычисление моментов функции $f(y)$ и ее коэффициентов Фурье при разложении в ряд по ортогональным полиномам сводится к вычислению повторных интегралов от $f(y)$. Следовательно, данная схема решает и эти задачи.

Практическое значение изученной схемы работы табулятора определяется тем местом, которое в численном анализе занимают схемы, связанные с приближением функций полиномами, и схемы, использующие кратное суммирование.

Описанная схема осуществлена автором статьи совместно с А. В. Симоновым на табуляторе Т-4 перфорационного действия.

В заключение укажем, что множительные машины соответствующего табулятору типа выполняют вычисление полинома с большей затратой времени (в 10—20 и более раз — в зависимости от степени полинома, значности его коэффициентов и значности аргумента).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
10 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1147 (1946). [2] Л. А. Люстерник, Усп. матем. наук, **1**, в. 5—6, 224. [3] И. Я. Акушский, Усп. матем. наук, **2**, в. 2, 143. [4] И. Я. Акушский, ДАН, **59**, № 8 (1948). [5] И. Я. Акушский, ДАН, **59**, № 9 (1948). [6] Усп. матем. наук, **2**, 1, 226.