Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 5

ГИДРОМЕХАНИКА

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЙ К КВАДРАТУРАМ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 8 VII 1948)

1. Если скорости движения вязкого газа не слишком велики, то движение газа с вполне достаточной степенью точности можно считать изотермическим. Действительно, отношение температуры стенки к температуре адиабатического потока выражается интегралом энергии [1]

$$\frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{ад}}} = 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} \mathrm{B}^2;$$

здесь B = число Барстоу — Маха, $\varkappa$ — показатель адиабаты (для воздуха $\varkappa = 1{,}4$).

Для $\mathrm{B} \leqslant 0{,}4$ получаем, что $T_{\text{ст}} / T_{\text{ад}} \leqslant 1{,}03$, т. е. температура меняется не более, чем на 3%.

2. Цель настоящего сообщения показать, что уравнения изотермического движения газа могут быть приведены к весьма простому виду и в определенном классе случаев даже сводятся к квадратурам.

Исходные уравнения имеют вид [1]

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\rho u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \rho u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\rho = \frac{p(x)}{RT_0}. \tag{3}$$

Здесь $\psi(x, y)$ — функция тока, $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ — компоненты скорости, $p(x)$ — давление, T_0 — температура, μ — вязкость, ρ — плотность, R — газовая постоянная.

Граничные условия системы (1)—(3) суть:
условие прилипания:

$$\text{при } y = 0 \qquad u_x = u_y = 0; \tag{4}$$

условие перехода вязкого потока в адиабатический поток:

$$\text{при } y = \infty \qquad u_x = \bar{u}, \quad \partial u_x / \partial y = 0. \tag{5}$$

Здесь $\bar{u}$ — значение скорости адиабатического потока.

3. Аналогично нашим работам ([2], [3]), введем в качестве независимых переменных

$$x, \qquad u_1 = u_x / \overline{u}, \tag{6}$$

а в качестве зависимой переменной

$$v = \frac{\sqrt{\mu}}{\rho} \frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{7}$$

Формулы перехода от старых переменных к новым суть

$$\begin{gathered} \frac{\partial \psi}{\partial y} \to \frac{\rho}{\overline{u}\sqrt{\mu}} v \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} \to \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \to \overline{u}' u_1 + \overline{u} \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} \to \frac{\rho}{\sqrt{\mu}} v. \end{gathered} \tag{8}$$

В силу (8) система уравнений (1) — (2) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{dp/dx \sqrt{\mu}}{\rho v} - \frac{1}{\overline{u}} \frac{\partial v}{\partial u_1} \rho \sqrt{\mu} + \frac{\overline{u}}{\overline{u}} u_1 \frac{\partial \psi}{\partial u_1}. \tag{1'}$$

С другой стороны, первое из уравнений (2) дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \frac{\sqrt{\mu}\, \overline{u}^2}{v} u_1. \tag{2'}$$

Исключая из уравнений (1′) и (2′) функцию тока ψ и пользуясь также интегралом энергии для адиабатического потока

$$\frac{\overline{u}^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}, \tag{$*$}$$

окончательно получаем уравнение

$$v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial u_1^2} + a(x)(u_1^2 - 1) \frac{\partial v}{\partial u_1} - b(x) u_1 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

где $a(x) = \overline{u}^2 \overline{u}' / \rho$, $b(x) = \overline{u}^3 / \rho$.

Граничные условия уравнения (9) суть:

$$\text{при } u_1 = 0 \qquad v \frac{\partial v}{\partial u_1} = -\frac{\overline{u}^2 \overline{u}'}{\rho}; \tag{10}$$

$$\text{при } u_1 = 1 \qquad v = 0. \tag{11}$$

Условие (10) является следствием (1) и (4), условие (11) следует из (5).

4. Не касаясь здесь общей теории интегрирования системы (9) — (11), найдем класс случаев, когда система сводится к квадратурам.

Будем искать решение в форме Фурье

$$v = A(x)\, B(u_1). \tag{12}$$

Для определения $B(u_1)$ получаем уравнение

$$B^2 \frac{d^2B}{du_1^2} + \alpha(u_1^2 - 1)\frac{dB}{du_1} - \beta u_1 B = 0 \tag{13}$$

при граничных условиях

$$B(0)B'(0) = -\alpha, \tag{14}$$

$$B(1) = 0. \tag{15}$$

Постоянные коэффициенты α и β выражаются при помощи формул

$$\alpha = \frac{z'q}{\rho}, \tag{16}$$

$$\beta = -\frac{3}{2}\frac{zq'}{\rho}. \tag{17}$$

Здесь приняты обозначения: $z = \bar{u}^3/3$, $q = 1/A^2$.

5. В случае $\beta = 2\alpha$ система (13)—(15) приводится к квадратуре

$$B(u_1) = \sqrt{\frac{2\alpha}{3}}\sqrt{u_1^3 - 3u_1 + 2}. \tag{18}$$

Для того чтобы определить, какому распределению давлений (или, что то же, — какому распределению скоростей) соответствует как указанный частный случай, так и вообще формула (10), сопоставим (16) и (17). Тогда получаем уравнение

$$\frac{dq}{q} = -\frac{2\beta}{3\alpha}\frac{dz}{z},$$

квадратура которого дает

$$q = cz^{-2\beta/3\alpha}, \tag{16'}$$

и, сопоставляя (16') с (16) и выражая также ρ по (3), окончательно получаем уравнение для определения z:

$$\frac{dz}{dx} = c_1 z^{2\beta/3\alpha} p$$

(c_1 — произвольная константа).

Выражая z через $\bar{u}$ и p через $\bar{u}$ согласно интегралу энергии ($*$), находим отсюда закон распределения скоростей в виде

$$x = m\int e^{\frac{\bar{u}^2}{2RT_0}} \bar{u}^{-2\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)} d\bar{u} + n, \tag{19}$$

где m и n — постоянные коэффициенты.

Для случая приведения к квадратурам ($\beta = 2\alpha$) находим

$$x = m\int e^{\frac{\bar{u}^2}{2RT_0}} \frac{d\bar{u}}{\bar{u}^2} + n. \tag{17'}$$

6. В общем случае система (9) — (11) интегрируется методами нашей работы ([2]).

Заметим, что методы настоящей работы могут быть применены и к неизотермическому течению (т. е. к большему диапазону скоростей), если разбить поток на две области: область I — вблизи стенки, где скорости не слишком велики и поток, следовательно, можно считать изотермическим, и область II — неизотермического течения, для которой решение получается методом продолжения решения из области I.

Действительно, в случае неизотермического течения уравнение (1) принимает вид

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\right), \tag{1'}$$

причем ρ и μ, равно как и температура T в уравнении (3), суть функции x и y.

Уравнения (2) и (3) сохраняют свой вид, поэтому сохраняют свой вид и формулы (8) перехода от старых переменных к новым.

Уравнение, аналогичное уравнению (9), для неизотермического потока было получено в нашей работе ([3]).

Поступило
28 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин, Теоретическая гидромеханика, II, 1939. [2] А. М. Файнзильбер, ДАН, 47, № 7 (1945). [3] А. М. Файнзильбер, ДАН, 47, № 8 (1945). [4] А. М. Файнзильбер, ДАН, 51, №№ 7, 8 (1946).