Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 5

МЕХАНИКА

В. В. СОЛОДОВНИКОВ

КРИТЕРИЙ ОТСУТСТВИЯ ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЙ И КРИТЕРИЙ МОНОТОННОСТИ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 5 VI 1948)

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы сформулировать критерии, определяющие необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять обобщенные частотные характеристики линейных систем [1] (в частности, следящих систем и систем автоматического регулирования) для того, чтобы переходный процесс совершался: 1) без перерегулирований, 2) монотонно.

1. Критерий отсутствия перерегулирований. Предположим, что переходная функция $x(t)$ системы может быть представлена в виде:

$$x(t) = x_0 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Y(\omega)}{\omega}\cos t\omega\, d\omega, \tag{1}$$

где

$$x_0 = \lim_{t\to\infty} x(t), \quad x(t) = 0, \quad t < 0 \tag{2}$$

и $Y(\omega)$ — обобщенная мнимая частотная характеристика, представляющая собой нечетную функцию от частоты: $Y(\omega) = \omega Y_0(\omega)$, где $Y_0(\omega)$ — четная функция.

Введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon(t) = x_0 - x(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{Y(\omega)}{\omega}\cos t\,\omega\, d\,\omega. \tag{3}$$

Для того чтобы процесс совершался без перерегулирований, мы должны иметь:

$$\varepsilon(t) \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad t > 0. \tag{4}$$

Таким образом, задача формулировки критерия отсутствия перерегулирований сводится к решению следующего вопроса: какими свойствами должна обладать функция $(-Y(\omega)/\omega)$ для того, чтобы ее косинус-трансформация Фурье была неотрицательной функцией?

На основании известной теоремы [2], приведенной в предыдущей нашей заметке [1], ответ на этот вопрос может быть сформулирован следующим образом.

Для того чтобы переходный процесс совершался без перерегулирований, т. е. чтобы

$$x(t) \leqslant x_0 \quad \text{при всех} \quad t > 0, \tag{5}$$

если функция $x(t)$ удовлетворяет условиям (2), необходимо и достаточно, чтобы функция $(-Y(\omega)/\omega)$ была положительно-определенной.

2. Критерий монотонности. Воспользуемся для определения переходной функции $x(t)$ интегралом:

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{X(\omega)}{\omega} \sin t\omega \, d\omega, \tag{6}$$

где через $X(\omega)$ обозначена обобщенная вещественная частотная характеристика.

Для того чтобы переходный процесс протекал монотонно, если известно, что

$$x(t) = 0, \quad t \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = x_0, \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$dx/dt \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad t > 0. \tag{8}$$

Дифференцируя обе части выражения (6) по t, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(\omega) \cos t\omega \, d\omega, \tag{9}$$

и, следовательно, критерий монотонности может быть сформулирован следующим образом.

Для того чтобы при удовлетворении условий (7) переходный процесс совершался монотонно, необходимо и достаточно, чтобы обобщенная вещественная частотная характеристика $X(\omega)$ представляла собой положительно-определенную функцию.

3. Некоторые необходимые условия для удовлетворения критерия отсутствия перерегулирований и критерия монотонности. Известен ряд необходимых, но не достаточных условий, которым должны удовлетворять трансформации Фурье для неотрицательных функций [2,3]. Некоторые из этих условий весьма просты с точки зрения их практического использования и могут применяться для предварительной „отсортировки“ систем, не удовлетворяющих заданным требованиям.

Так, например, для того, чтобы переходный процесс совершался без перерегулирований, необходимо удовлетворение неравенства

$$|(-Y(\omega)/\omega)| \leqslant A \quad \text{при всех } \omega, \tag{10}$$

где

$$A = (-Y(\omega)/\omega)_{\omega=0}. \tag{11}$$

Если функция $(-Y(\omega)/\omega)$ удовлетворяет условию

$$(-Y(\omega)/\omega) = 0 \quad \text{при} \quad \omega > \omega_c, \tag{12}$$

то для отсутствия перерегулирований необходимо удовлетворение также следующего неравенства:

$$\left| \left(-\frac{Y(\omega)}{\omega} \right) \right| \leqslant A \cos \frac{\pi}{[\omega_c/\omega] + 1}, \quad \omega \leqslant \omega_c. \tag{13}$$

Точно так же для того, чтобы переходный процесс совершался монотонно, должно быть

$$|X(\omega)| < X(0) \quad \text{при всех } \omega, \tag{14}$$

и если

$$|X(\omega)| = 0 \quad \text{при} \quad \omega > \omega_c, \tag{15}$$

то необходимым, но не достаточным условием для монотонности процесса является соблюдение неравенства

$$|X(\omega)| \leqslant X(0)\cos\frac{\pi}{[\omega_c/\omega]+1}, \quad \omega \leqslant \omega_c. \tag{16}$$

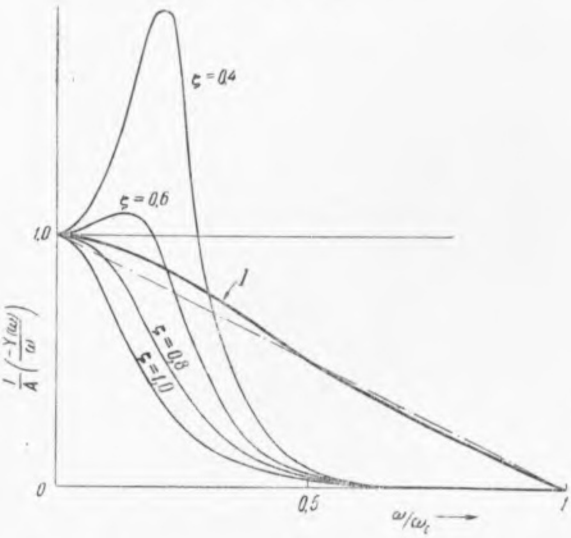

Рис. 1. $I - \cos\frac{\pi}{[\omega_c/\omega]+1}$; $\omega_c = 4{,}0$

4. Примеры. В качестве примера применения условия (13) для „отсортировки" систем, не удовлетворяющих критерию отсутствия

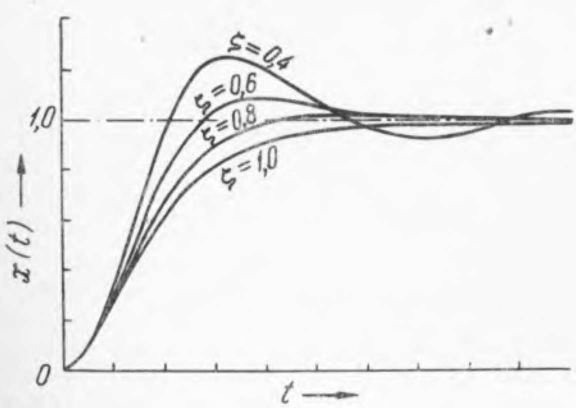

Рис. 2

перерегулирований, рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\frac{dx}{dt} + x = [1]. \tag{17}$$

Имеем

$$\left(-\frac{Y(\omega)}{\omega}\right) = \frac{2\zeta}{(1-\omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2} \tag{18}$$

и, следовательно

$$A = 2\zeta. \tag{19}$$

На рис. 1 изображены кривые $\frac{1}{A}\left(-\frac{Y(\omega)}{\omega}\right)$ для различных ζ. Эти кривые, согласно (13), должны располагаться внутри области, граница которой отмечена жирной линией. Таким образом, в случае $\zeta = 0{,}6$ и $\zeta = 0{,}4$ функция $x(t)$ обязательно будет иметь перерегулирования. При $\zeta = 0{,}8$ кривая $(-Y(\omega)/\omega)$ находится при низких частотах на границе области. При $\zeta = 1{,}0$ необходимое условие (13) для отсутствия перерегулирований удовлетворено. Функции для (17) изображены на рис. 2.

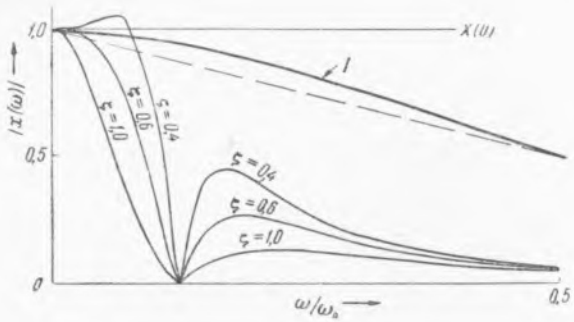

Рис. 3. $I - X(0)\cos\frac{\pi}{[\omega_c/\omega]+1}$; $\omega_c = 4{,}0$

Для того чтобы пояснить, каким образом, пользуясь условием (16), можно „отсортировывать“ системы, не удовлетворяющие критерию монотонности, рассмотрим то же уравнение (17).

В данном случае

$$|X(\omega)| = \frac{|(1-\omega^2)|}{(1-\omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}. \tag{20}$$

Кривые $X(\omega)$, вычисленные по формуле (20) для различных ζ, изображены на рис. 3. Как мы видим, в случае $\zeta = 0{,}4$ и $\zeta = 0{,}6$ кривые выходят из границы области, определяемой условием (16), и, следовательно, соответствующие переходные функции не удовлетворяют критерию монотонности. Рассмотрение рис. 2 подтверждает этот вывод.

Поступило
5 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Солодовников, ДАН, **60**, № 6 (1948). [2] Mathias, Math. Z., **16**, 103 (1923). [3] R. Boas and M. Kac, Duke Math. J., **12**, 1, 189 (1945).