Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. В. ЮРОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 VIII 1948)

Знаменитый русский математик А. М. Ляпунов в своем классическом сочинении ([1]), изучая случай периодических движений, определяемых дифференциальным уравнением

$$y'' + p(t)\, y = 0, \tag{1}$$

где $p(t)$ — непрерывная, вещественная, периодическая функция с периодом ω ($\omega > 0$), принимающая только положительные или равные нулю значения (не будучи нулем тождественно), показал, что для устойчивости интегралов уравнения (1) достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\omega \int_0^\omega p(t)\, dt \leqslant 4. \tag{2}$$

В настоящей работе мы, развивая метод Ляпунова, даем критерий устойчивости интегралов системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11} x_1 + p_{12} x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = p_{21} x_1 + p_{22} x_2, \tag{3}$$

где $p_{ik}(t)$ — непрерывные *, вещественные, периодические функции t с периодом ω ($\omega > 0$) при условии, что

$$\int_0^\omega p_{11}\, dt = \int_0^\omega p_{22}\, dt = \alpha. \tag{4}$$

Подстановками:

$$x_1 = y_1 e^{\int_0^t p_{11}\, dt}, \qquad x_2 = y_2 e^{\int_0^t p_{22}\, dt} \tag{5}$$

* В силу известной теоремы Каччиопполи — Тихонова об операторных уравнениях, полученные результаты легко можно распространить и на случай, когда коэффициенты $p_{ik}(t)$ абсолютно интегрируемые, вещественные, периодические функции t.

система (3) преобразуется к виду:

$$\frac{dy_1}{dt}=P(t)\,y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt}\,Q(t)\,y_1, \tag{6}$$

где положено:

$$P(t)=p_{12}\,e^{\int\limits_0^t (p_{22}-p_{11})\,dt}, \qquad Q(t)=p_{21}\,e^{\int\limits_0^t (p_{11}-p_{22})\,dt}.$$

В силу предположения (4) система (6) имеет в качестве коэффициентов $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные, вещественные, периодические функции t с периодом ω $(\omega>0)$.

Для системы (6) составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-2A\lambda+1=0. \tag{7}$$

Коэффициент A дается бесконечным рядом

$$A=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(\omega),$$

где положено

$$\psi_n(\omega)=y_{11}^{(2n)}(\omega)+y_{22}^{(2n)}(\omega) \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Функции $y_{11}^{(2n)}(t)$ и $y_{22}^{(2n)}(t)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{gathered} y_{11}^{(n)}(t)=\int\limits_0^t P(t_1)\,dt_1\int\limits_0^{t_1} Q(t_2)\,y_{11}^{(n-2)}(t_2)\,dt_2, \\ y_{22}^{(n)}(t)=\int\limits_0^t Q(t_1)\,dt_1\int\limits_0^{t_1} P(t_2)\,y_{22}^{(n-2)}(t_2)\,dt_2. \end{gathered} \tag{9}$$

При $n=1$ имеем:

$$\psi_1(\omega)=y_{11}^{(2)}(\omega)+y_{22}^{(2)}(\omega)=\int\limits_0^{\omega} P(t)\,dt\cdot\int\limits_0^{\omega} Q(t)\,dt. \tag{10}$$

Относительно функций (8), определяемых рекуррентными соотношениями (9), можно доказать неравенство, аналогичное известному неравенству Ляпунова.

Лемма. *Если функции P и Q не равны тождественно нулю и не меняют знака в интервале $(0, \omega)$, то при $n>1$ функции $\psi_n(t)$ удовлетворяют неравенству:*

$$|\,\psi_n(t)\,|<\frac{|\,\psi_1(t)\,|\;|\,\psi_{n-1}(t)\,|}{2n}. \tag{11}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Функции P и Q не меняют знака, не тождественно равны нулю в интервале $(0, \omega)$ и разных знаков.

В этом случае ряд для A имеет вид:

$$A=1-\frac{|\psi_1|}{2}+\frac{|\psi_2|}{2}-\frac{|\psi_3|}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{|\psi_n|}{2}+\ldots=$$
$$=1-\frac{1}{2}(|\psi_1|-|\psi_2|)-\frac{1}{2}(|\psi_3|-|\psi_4|)-\ldots,$$

причем аргумент ω мы опускаем.

Применяя к функциям $|\psi_{2k}|$ неравенство (11), получим, с одной стороны:

$$A<1-\frac{|\psi_1|}{2}\left(1-\frac{|\psi_1|}{4\cdot 1}\right)-\frac{|\psi_3|}{2}\left(1-\frac{|\psi_1|}{4\cdot 2}\right)-\ldots \tag{12}$$

Применяя к функциям $|\psi_{2k+1}|$ неравенство (11), получим, с другой стороны:

$$A>1-\frac{|\psi_1|}{2}+\frac{1}{2}|\psi_2|\left(1-\frac{|\psi_1|}{4\cdot 1+2}\right)+\frac{1}{2}|\psi_4|\left(1-\frac{|\psi_1|}{4\cdot 2+2}\right)+\ldots \tag{13}$$

Из неравенств (12) и (13) следует, что, полагая $|\psi_1|\leqslant 4$, получим:

$$|A|<1.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Если*:

1) *коэффициенты* p_{12} *и* p_{21} *системы* (3) *не равны тождественно нулю, не меняют знака в интервале* $(0,\omega)$ *и разных знаков*:

2) $\alpha\leqslant 0$;

3) $\int\limits_0^{\omega}|p_{12}|\,e^{\int\limits_0^t(p_{22}-p_{11})\,dt}dt\cdot\int\limits_0^{\omega}|p_{21}|\,e^{\int\limits_0^t(p_{11}-p_{22})\,dt}dt\leqslant 4,$

то интегралы системы (3) *устойчивы*.

Замечание. Из теоремы 1 легко получается условие (2) для уравнения (1).

Случай 2. Функции P и Q не меняют знака, не тождественно равны нулю в интервале $(0,\omega)$ и одинаковых знаков.

В этом случае ряд для A имеет вид:

$$A=1+\frac{\psi_1}{2}+\frac{\psi_2}{2}+\ldots>1.$$

Но если $A>1$, то корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения (7) будут вещественны и положительны.

В силу (5) интегралы системы (3) устойчивы, если

$$A+\sqrt{A^2-1}<e^{-\alpha},$$

и неустойчивы в противном случае.

На основании неравенства (11) легко показать, что

$$A<e^{\psi_1/2},$$

т. е. имеет место следующая

Теорема 2. *Если*

1) *коэффициенты* p_{12} *и* p_{21} *системы* (3) *не равны тождественно нулю, не меняют знака в интервале* $(0, \omega)$ *и одинаковых знаков*;

2) $\alpha < 0$;

$$3) \int_0^{\omega} p_{12} e^{\int_0^t (p_{22}-p_{11})\,dt} dt \cdot \int_0^{\omega} p_{21} e^{\int_0^t (p_{11}-p_{22})dt} dt < -2\alpha - 2\ln 2,$$

то интегралы системы (3) *устойчивы.*

Поступило
26 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892.