Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. А. ШЕСТАКОВ

ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ СИСТЕМЫ ВИДА $\frac{dx_1}{dt}=X_1(x_1)$, $\frac{dx_i}{dt}=\varphi_i(x_1, x_i)+X_i(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 VIII 1948)

§ 1. Дана система дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1(x_1),\ \frac{dx_i}{dt}=\varphi_i(x_1, x_i)+X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad i=2, 3, \ldots, n, \tag{1}$$

и пусть точка O $(x_1=x_2=\ldots=x_n=0)$ является изолированной особой точкой системы (1).

Предположим, что значение $x_1=0$ является изолированным нулем функции $X_1(x_1)$ и интеграл вида

$$J=\int\limits_0^{x_1}\frac{dx_1}{X_1(x_1)} \tag{2}$$

расходящийся.

Непрерывные функции φ_i, $i=2, 3, \ldots, n$, таковы, что существуют два положительных числа m и M, для которых

$$m<\left|\frac{\varphi_i(x_1, x_i)-\varphi_i(x_1, \bar{x}_i)}{x_i-\bar{x}_i}\right|<M,\quad x_i\neq\bar{x}_i,\quad i=2, 3, \ldots, n, \tag{3}$$

если только x_1, $\bar{x}_i$, x_i изменяются в области:

$$0\leqslant x_1\leqslant\rho,\quad |x_i|\leqslant\rho,\quad |\bar{x}_i|\leqslant\rho,\quad i=2, 3, \ldots, n.$$

Условие (3) всегда выполнено, если функции $\varphi_i(x_1, x_i)$ имеют по x_i производные, непрерывные и отличные от нуля.

Непрерывные функции X_i, $i=2, 3, \ldots, n$, таковы, что существуют непрерывные частные производные первого порядка, обращающиеся в нуль в точке O вместе с функциями X_i.

Заметим, что отношения

$$\frac{\varphi_i(x_1, x_i)-\varphi_i(x_1, \bar{x}_i)}{x_i-\bar{x}_i},\quad i=2, 3, \ldots, n, \tag{4}$$

сохраняют в силу условия (3) постоянный знак, и требование расходимости интеграла (2) не является ограничением на функцию $X_1(x_1)$, так как точка O является особой точкой системы (1). Поведение интегральных кривых системы (1) мы рассматриваем в сфере S_r:

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2$ достаточно малого радиуса r, не содержащей особых точек, кроме O.

§ 2. Допустим, что $k-1$ отношений (4) имеют положительный знак, $n-k$ отношений имеют отрицательный знак. Для определенности положим, что при $i=2, 3, \ldots, k$ отношения (4) положительны и при $i=k+1, \ldots, n$ — отрицательны. Тогда имеет место [1]

Теорема 1. *Для любой системы k чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$ $(x_1^0>0)$, абсолютные значения которых достаточно малы, существует единственная система $n-k$ чисел $x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0$, обладающая тем свойством, что через точку $K(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ n-мерного пространства проходит единственная* 0-*кривая системы* (1), *примыкающая к особой точке O при $t \to -\infty$ (в предположении, что $X_1(x_1)>0$ при $x_1>0$).*

Доказательство. Определим два положительные числа r и ρ $(r<\rho)$ неравенствами:

$$|\varphi_i(x_1, 0)+X_i(x_1, 0, \ldots, 0)| \leqslant \lambda(1-\theta)\rho-\lambda r, \quad i=2, 3, \ldots, k,$$

$$|\varphi_j(x_1, 0)+X_j(x_1, 0, \ldots, 0)| \leqslant \lambda\rho(1-\theta), \qquad j=k+1, \ldots, n,$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant r, \tag{5}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{2}(m+M), \qquad \theta=\frac{M-m}{M+m}, \qquad \theta<1.$$

Нетрудно убедиться, что система (1) эквивалентна при начальных условиях:

$$x_i(x_1^0)=x_i^0, \; i=2, 3, \ldots, k; \quad x_i(x_i^0)=0, \quad i=k+1, \ldots, n, \quad |x_i^0| \leqslant r \tag{6}$$

следующей системе интегральных уравнений:

$$x_i=\exp-\lambda\varphi(x_1)\left[x_i^0\exp\lambda\varphi(x_1^0)-\int\limits_{x_1}^{x_1^0}\frac{\varphi_i+X_i-\lambda x_i}{X_1(x_1)\exp-\lambda\varphi(x_1)}\,dx_1\right], \tag{7¹}$$

$$i=2, 3, \ldots, k;$$

$$x_j=\exp\lambda\varphi(x_1)\int\limits_0^{x_1}\frac{\varphi_j+X_j+\lambda x_j}{X_1(x_1)\exp\lambda\varphi(x_1)}\,dx_1, \qquad j=k+1, \ldots, n, \tag{7²}$$

где функция $\varphi(x_1)$ определена при помощи соотношения:

$$\varphi(x_1)=\int\limits_{x_1}^{r}\frac{dx_1}{X_1(x_1)}, \qquad \lim_{x_1 \to +0}\varphi(x_1)=\infty.$$

Определим последовательные приближения $x_i^{(k)}(x_1)$:

$$x_i^{(m)}=\exp-\lambda\varphi(x_1)\left[x_i^0\exp\lambda\varphi(x_i^0)-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{x_1}^{x_1^0}\frac{\varphi_i(x_1, x_i^{(m-1)})+X_i(x_1, x_2^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)})-\lambda x_i^{k-1}}{X_i(x_1)\exp-\lambda\varphi(x_1)}\,dx_1\right], i=2, \ldots, k; \tag{8¹}$$

$$x_j^{(m)} = \exp\lambda\varphi(x_1)\int\limits_0^{x_1}\frac{\varphi_j(x_1, x_j^{(m-1)}) + X_j(x_1, x_2^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}) + \lambda x_j^{(m-1)}}{X_1(x_1)\exp\lambda\varphi(x_1)}\,dx_1, \tag{8^2}$$

$$j = k+1, \ldots, n,$$

взяв за первое приближение $x_i^{(1)}(x_1)$ систему функций

$$x_i^{(1)}(x_1) = \frac{x_i^0 x_1}{x_1^0}, \quad i = 2, 3, \ldots, k; \qquad x_j^{(1)}(x_1) \equiv 0, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Легко доказывается, что последовательные приближения: 1) непрерывны на сегменте $0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0$; 2) по абсолютной величине меньше ρ, если $0 \leqslant x_1 < r$, и 3) равномерно сходятся при $0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 < r$.

Предельные функции $x_i^*(x_1) = \lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)}(x_1)$ непрерывны,

$$\lim x_i^*(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad x_1 \to +0;$$

$$|x_i^*(x_1)| \leqslant \rho, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant r; \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

и удовлетворяют системе интегральных уравнений (7^1) — (7^2) и системе дифференциальных уравнений (1).

Доказывается также, что полученное методом последовательных приближений решение $x_i^*(x_1)$ единственно.

§ 3. Докажем теорему, которая, дополняя теорему 1, позволяет дать классификацию особых точек системы (1).

Теорема 2. *Существует достаточно малое положительное число r такое, что любая интегральная кривая сферы S_r является или 0-кривой, или седловой кривой.*

Доказательство. Пусть при $x_1 = x_1^0$ $x_i = x_i^0$, $i = 2, 3, \ldots, n$, при этом $|x_1^0| < r$. Интегрируем (1) при этих начальных условиях:

$$x_i = \exp-\lambda\varphi(x_1)\left[x_i^0\exp\lambda\varphi(x_1^0) - \int\limits_{x_1}^{x_1^0}\frac{\varphi_i + X_i - \lambda x_i}{X_1(x_1)\exp-\lambda\varphi(x_1)}\,dx_1\right], \tag{9^1}$$

$$i = 2, 3, \ldots, k;$$

$$x_i = \exp\lambda\varphi(x_1)\left[x_i^0\exp-\lambda\varphi(x_1^0) - \int\limits_{x_1}^{x_1^0}\frac{\varphi_i + X_i + \lambda x_i}{X_1(x_1)\exp\lambda\varphi(x_1)}\,dx_1\right], \tag{9^2}$$

$$i = k+1, \ldots, n.$$

Число r мы можем выбрать настолько малым, чтобы при достаточно малых x_1, если абсолютные значения x_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, меньше r, выполнялись неравенства:

$$|\varphi_i + X_i - \lambda x_i| < \varepsilon r, \quad i = 2, 3, \ldots, k;$$
$$|\varphi_j + X_j + \lambda x_j| < \varepsilon r, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Если точка $(x_2(x_1), \ldots, x_n(x_1))$ остается в области S_r^+, то при достаточно малых x_1 имеем:

$$|x_i| \leqslant r\exp\lambda(\varphi(x_1^0) - \varphi(x_1)) + \varepsilon r\int\limits_{x_1}^{x_1^0}\frac{\exp\lambda\varphi(x_1)}{X_1(x_1)}\,dx_1 < \frac{2\varepsilon r}{\lambda}, \; i = 2, 3, \ldots, k; \tag{10^1}$$

$$x_i = x_i^0 \exp - \lambda (\varphi(x_1^0) - \varphi(x_1)) - \Phi_i(x_1), \quad i = k+1, \ldots, n, \tag{10^2}$$

где

$$|\Phi_i(x_1)| \leqslant \frac{\varepsilon r}{\lambda} \exp - \lambda (\varphi(x_1^0) - \varphi(x_1)), \quad i = k+1, \ldots, n.$$

Возьмем ε таким, чтобы $2\varepsilon / \lambda$ было меньше $^1/_8$. Предположим, что в сфере S_r^+ существует такая интегральная кривая, которая при $t \to -\infty$ не выходит из области S_r^+ и не является 0-кривой. Пусть $L = \limsup\limits_{x_1 \to +0} |x_i(x_1)|$ и предположим $r < 2L$. Из (10^1) выводим, что $L \neq 0$ не может быть верхним пределом функции x_i, $i = 2, 3, \ldots, k$. Следовательно, L — верхний предел одной из функций x_i, $i = k+1, \ldots, n$, например x_{k+1}. Но функция $x_{k+1}(x_1)$ при $x_1 \to +0$, как показывает уравнение (10^2), становится больше r, и этим теорема 2 доказана.

§ 4. Система (1) имеет следующие пять типов особых точек ([2]).

I. Обобщенный узел имеет место при

1) $X_1(x_1) > 0$, $x_1 > 0$; $X_1(x_1) < 0$, $x_1 < 0$ и положительных (4);

2) $X_1(x_1) < 0$, $x_1 < 0$; $X_1(x_1) > 0$, $x_1 < 0$ и отрицательных (4).

II. Обобщенное седло 1-го рода имеет место, если $k-1$ отношений (4) положительны, $n-k$ отношений отрицательны и

3) $X_1(x_1) > 0, x_1 \neq 0$; 4) $X_1(x_1) < 0$, $x_1 \neq 0$.

III. Обобщенное седло 2-го рода имеет место, если $k-1$ отношений (4) положительны, $n-k$ отношений (4) отрицательны и

5) $X_1(x_1) > 0$, $x_1 > 0$; $X_1(x_1) < 0$, $x_1 < 0$;

6) $X_1(x_1) < 0$, $x_1 > 0$; $X_1(x_1) > 0$, $x_1 > 0$.

IV. Обобщенное седло 3-го рода имеет место, если отношения (4) положительны и

7) $X_1(x_1) < 0$ при $x_1 > 0$; $X_1(x_1) > 0$ при $x < 0$,

или если отношения (4) отрицательны и

8) $X_1(x_1) > 0$ при $x_1 > 0$; $X_1(x_1) < 0$ при $x_1 < 0$.

V. Седло-узел имеет место, если отношения (4) положительны и

9) $X_1(x_1) > 0$, $x_1 \neq 0$; 10) $X_1(x_1) < 0$, $x_1 \neq 0$

или если отношения (4) отрицательны и

11) $X_1(x_1) < 0$, $x_1 \neq 0$; 12) $X_1(x_1) > 0$, $x_1 \neq 0$.

§ 5. Достаточное условие, при котором 0-кривые системы (1) являются правильными 0-кривыми, дает:

Теорема 3. *Для того чтобы 0-кривые системы* (1) *были правильными 0-кривыми и примыкали к О по одному и тому же направлению, достаточно, чтобы первая производная* $dX_1(x_1)/dx_1$* *обращалась в точке О в нуль.*

На примере легко показать, что если производная dX_1/dx_1 не равна нулю в точке O, то 0-кривые системы могут входить в особую точку по разным направлениям.

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Perron, Math. Ann., **75**, 253 (1914). [2] А. А. Шестаков, ДАН, **62**, № 2 (1948).

* Если в точке $x_1 = 0$ нет обычной производной, но в этой точке существуют правая и левая производные, то эти производные должны обращаться в нуль.