Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. В. ПЕНТКОВСКИЙ

# НЕПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НОМОГРАММ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОРЯДКА

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 VIII 1948)*

Уравнение 3-го номографического порядка всегда можно [1] представить в виде

$$F(z_1, z_2, z_3) \equiv f_1 + f_2 + f_3 = 0, \text{ где } f_i = f(z_i). \tag{1}$$

По теореме Соро, уравнение (1) допускает бесчисленное множество анаморфоз. Из условий Сен-Робера

$$\frac{F'_{z_1}}{F'_{z_2}} = \frac{f'_1}{f'_2} = M(z_1)\,N(z_2)\,R(z_3)$$

можно получить выражения анаморфизирующих функций $\xi(z_1)$ и $\eta(z_2)$, положив $M(z_1) = f'_1\, m$, $N(z_2) = 1/f'_2\, m$, где $m = \text{const}$. Тогда

$$\xi = \int M dz_1 = m\int f'_1 dz_1 = m(f_1 + \alpha), \quad \eta = \int \frac{dz_2}{N} = m\int f'_2 dz_2 = m(f_2 + \beta),$$

где $\alpha$ и $\beta$ — независимые произвольные постоянные. Уравнение (1) принимает тогда вид:

$$\xi + \eta + \zeta = 0, \text{ где } \zeta = m(f_3 + \gamma),\ \gamma = -\alpha - \beta. \tag{2}$$

Номограммы уравнения (2) при различных $\alpha, \beta$ и $m$ будут анаморфозами номограммы уравнения (1). Параметры $\alpha$, $\beta$ и $m$ в данном случае имеют простой геометрический смысл: они определяют аффинное преобразование плоскости номограммы, в частности, движение и подобие на каждой из шкал:

$$\xi = (\xi_0 + \alpha)\,m, \quad \eta = (\eta_0 + \beta)\,m, \quad \zeta = (\zeta_0 + \gamma)\,m. \tag{3}$$

Метрический характер параметров $\alpha$, $\beta$ и $m$ сохраняется при любом номографическом изображении уравнения (2). Таких изображений может быть 8. Для первой канонической формы можно построить номограммы на трех попарно пересекающихся прямых, на коническом сечении и пересекающей его прямой и на уникурсальной кривой третьего порядка, имеющей петлю. Для второй канонической формы можно построить номограммы на трех пересекающихся в одной точке прямых, на коническом сечении и касательной к нему и на уникурсальной кривой, имеющей точку возврата. Для третьей канонической формы можно построить номограммы на коническом сечении и не пересекающей его прямой и на уникурсальной кривой с изолированной точкой.

Вторая каноническая форма уравнения 3-го номографического порядка может быть переведена в первую каноническую форму

$$10^{\xi}10^{\eta}10^{\zeta}=1 \tag{4}$$

и в третью каноническую форму

$$\operatorname{tg}\xi\operatorname{tg}\eta\operatorname{tg}\zeta=\operatorname{tg}\xi+\operatorname{tg}\eta+\operatorname{tg}\zeta. \tag{5}$$

На каждой из номограмм преобразования шкал $\xi$, $\eta$ и $\zeta$ при изменении параметров $\alpha$, $\beta$ и $m$ в переменных $\xi$, $\eta$ и $\zeta$ будут иметь тот же метрический характер, что и в простейшем случае. Сама номограмма будет при этом подвергаться непроективному преобразованию, сохраняющему носители шкал.

Метрика на шкалах номограмм первой канонической формы имеет гиперболический вид: на каждой шкале имеются две неподвижные точки —„бесконечно удаленные точки". Метрика на шкалах номограмм второй канонической формы имеет параболический вид: на каждой шкале имеется одна неподвижная точка—„бесконечно удаленная точка". Метрика на шкалах номограмм третьей канонической формы имеет эллиптический вид: неподвижных точек на шкалах нет.

Указанные свойства номограмм уравнений 3-го номографического порядка позволяют дать весьма удобные способы построения номограмм этих уравнений.

Для каждого из 8 случаев на раз навсегда выбранных носителях наносятся шкалы переменных $\xi$, $\eta$ и $\zeta$. Это скелеты будущих номограмм. Для построения номограммы данного уравнения его шкалы рассчитываются в координатах $\xi$, $\eta$ и $\zeta$ по уравнениям

$$\xi_0=\lg f_1,\quad \eta_0=\lg f_2,\quad \zeta_0=\lg f_3;$$

для первой канонической формы $f_1f_2f_3=1$, по уравнениям:

$$\xi_0=f_1,\quad \eta_0=f_2,\quad \zeta_0=f_3;$$

для второй канонической формы $f_1+f_2+f_3=0$, и по уравнениям

$$\xi_0=\operatorname{arc\,tg}f_1,\quad \eta_0=\operatorname{arc\,tg}f_2,\quad \zeta_0=\operatorname{arc\,tg}f_3;$$

для третьей канонической формы $f_1f_2f_3=f_1+f_2+f_3$.

Преобразование номограммы имеет вид (3) и является движением при изменении параметров $\alpha$ и $\beta$ и преобразованием подобия при изменении параметра $m$. Эти преобразования легко выполняются графически на шкалах скелетов, что позволяет придать номограмме наиболее удовлетворяющий требованиям практики вид. Найденные значения $\alpha$, $\beta$ и $m$ подставляются в уравнения шкал номограммы в декартовых координатах, по которым и строится точный чертеж номограммы. При выборе варианта номограммы на скелете следует иметь в виду возможность дальнейшего его преобразования или аффинного или даже проективного [2].

Поступило
25 VIII 1948

### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Глаголев, Теоретические основы номографии, 1934, стр. 42 и далее.
[2] М. В. Пентковский, Проективное преобразование номограмм, 1937, стр. 17, 18, 41.