Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИН

НОВОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛЕВИТАНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 16 VIII 1948)

Б. М. Левитан дал в 1938 г. новое обобщение теории почти-периодических функций (1).

Введенные им новые почти-периодические функции определяются следующими требованиями:

I. Функция $f(x)$ непрерывна.

II. Каждой паре чисел $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ отвечает относительно плотное множество интервалов $E_{\varepsilon, N}$, состоящее из ε, N-смещений функции $f(x)$, т. е. при $\tau \in E_{\varepsilon, N}$

$$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon \qquad (|x| \leqslant N).$$

III. Множества $E_{\varepsilon, N}$ таковы, что при произвольных $\eta > 0$ и $N > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ из $\tau' \in E_{\varepsilon, N}$ и $\tau'' \in E_{\rho, N}$ следует, что

$$\tau' \pm \tau'' \in E_{\eta, N}.$$

Функции, определенные этими требованиями, мы будем в дальнейшем называть L-почти-периодическими функциями (L-п. п. функции).

Б. М. Левитан развил теорию этих функций, аналогичную теории Бора (2). В частности, им построены для этих функций ряды Фурье, доказаны равенство Парсеваля, теорема единственности и теорема об апроксимации.

В. А. Марченко (3) изучал L-п.п. функции, введя особую топологию на числовой оси. Ему удалось значительно упростить доказательства основных теорем этой теории и развить различные методы суммирования рядов Фурье L-п. п. функций.

В этой заметке мы дадим новое построение теории L-п. п. функций, которое имеет, на наш взгляд, ряд серьезных преимуществ. В частности, это построение дает возможность перенести теорию L-п. п. функций на функции, определенные на произвольной группе. Оно позволяет значительно полнее сформулировать теорему об апроксимации и лучше, как нам кажется, вскрывает смысл теоремы единственности.

Определение. Последовательность вещественных чисел τ_n мы назовем сходящейся к числу τ_0 по функции $f(x)$, если

$$\lim_{n \to \infty} f(x+\tau_n-\tau_0) = f(x) \tag{1}$$

при каждом значении переменной x $(-\infty < x < \infty)$.

Определение. Последовательность τ_n мы назовем условно сходящейся по функции $f(x)$

$$\tau_n \xrightarrow{f}, \text{ если } \lim_{\min(m,n)\to\infty} f(x+\tau_n-\tau_m)=f(x). \tag{2}$$

Заметим, что из условной сходимости последовательности τ_n не следует сходимость последовательности функций $f(x+\tau_n)$.

Основная теорема 1. *Для того чтобы функция $f(x)$ была L-п. п. функцией, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

1. *$f(x)$ непрерывна при $-\infty<x<\infty$.*

2. *Любая бесконечная последовательность вещественных чисел $\{\tau_n\}$ содержит подпоследовательность $\{\tau'_n\}$, условно сходящуюся по отношению к данной функции $\tau_n \xrightarrow{f}$ (условная компактность).*

3. *Если $\tau'_n \xrightarrow{f} 0$ и $\tau''_n \xrightarrow{f} 0$, то $\tau'_n \pm \tau''_n \xrightarrow{f} 0$ (групповое свойство).*

В силу теоремы 1 сходимость, определенная L-п. п. функцией, превращает числовую ось в условно компактное множество.

Из условия 3 следует непрерывность операции сложения в этой новой топологии, таким образом, числовая ось превращается в условно компактную топологическую группу, которую мы будем обозначать Ω_f. Дополняя эту группу идеальными элементами, как обычно, мы получим полную коммутативную компактную группу T_f со второй аксиомой счетности.

Группа Ω_f, очевидно, плотна в T_f. Из определения сходимости непосредственно следует, что при $\tau_n \xrightarrow{f} \tau_0$ верно $f(\tau_n)\to f(\tau_0)$ и, следовательно, функция $f(x)$ порождает непрерывную функцию $f[p_x]=f(x)$ на группе Ω_f.

Заметим, что равномерно непрерывная функция $F(p_x)$ на Ω_f порождает почти-периодическую функцию Бора $F(x)$ на оси. В самом деле, из равномерной непрерывности $F[p_x]$, следует, что при $\tau_n \xrightarrow{f}$

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F(x+\tau_n-\tau_m)-F(x)|\to 0 \quad \text{при } \min(n,m)\to\infty,$$

или

$$\sup|F(x+\tau_n)-F(x+\tau_m)|\to 0,$$

и, в силу условия 2 теоремы 1, всякая последовательиость $F(x+h_n)$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Каждый непрерывный характер группы T_f порождает непрерывный характер на оси $e^{i\Delta x}$. Все полученные таким образом числа Δ образуют счетный числовой модуль $\mathfrak{M}_f$, который естественно назвать модулем L-п. п. функции $f(x)$. Легко видеть, что сходимость последовательности точек $P_{\tau_n}\in\Omega_f$ к нулю эквивалентна условию

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta\tau_n|=0 \mod 2\pi \text{ при } \Delta\in\mathfrak{M}_f. \tag{3}$$

Отсюда получается

Теорема 2. *Для того чтобы функция $\varphi(x)$ была L-п. п. функцией с модулем, принадлежащим $\mathfrak{M}_f$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$ была непрерывной функцией на Ω_f, т. е. чтобы из*

$$f(x+\tau_n)\to f(x)$$

следовало

$$\varphi(x+\tau_n)\to\varphi(x). \tag{4}$$

Теорема 2 аналогична теореме Favard'а о почти-периодических функциях Бора ([5]). Определив на T_f непрерывную функцию $\varphi(p)$, совпадающую с $\varphi(p_x)=f(x)$ на отрезке $|x|\leqslant N$ и равную нулю вне $u_{\delta,N}$ — окрестности этого отрезка, затем апроксимируя порожденную функцией $\varphi(p)$ почти-периодическую функцию на оси $\varphi[p_x]$ обобщенным тригонометрическим полиномом, мы получим следующую теорему об апроксимации L-п. п. функций.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $f(x)$ была L-п. п. функцией с модулем, входящим в $\mathfrak{M}$, необходимо и достаточно, чтобы каждой паре чисел $\varepsilon>0$ и $N>0$ отвечали обобщенный тригонометрический полином $P(x)$ и число $\eta>0$ такие, что*

$$|f(x+\tau)-P(x+\tau)|<\varepsilon \quad (|x|\leqslant N),$$

где τ — любое η-смещение полинома $P(x)$.

Для построения рядов Фурье L-п. п. функций определим интеграл на группе T_f. Для непрерывных функций $\varphi(p)$, $p\in T_f$, можно положить

$$\int \varphi(p)\,dp=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi[p_x]\,dx. \tag{5}$$

С помощью интеграла, определенного для непрерывных функций, можно определить меру области G:

$$\operatorname{mes}(G)=\sup_{\varphi}\int\varphi(p)\,dp \quad (\varphi(p)\leqslant\chi_G(p)), \tag{6}$$

где $\varphi(p)$ — непрерывная функция на T_f, а $\chi_G(p)$ — характеристическая функция области G. Далее определяются мера Лебега и интеграл.

Определение. Функция $f(p)$ ($p\in T_f$) называется пространственным расширением функции $f(x)$, если

$$\varliminf_{p_{x_n}\to p} f(p_{x_n})\leqslant f(p)\leqslant\varlimsup_{p_{x_n}\to p} f(p_{x_n}), \tag{7}$$

где $p_{x_n}\in\Omega_f$.

Очевидно, пространственное расширение L-п. п. функции есть функция, непрерывная в точках Ω.

Каждому суммируемому пространственному расширению $f(p)$ L-п. п. функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье функции $f(x)$:

$$f(x)\sim\sum a_k e^{i\Delta_k x} \quad (\Delta_k\in\mathfrak{M}_f),$$

причем

$$a_k=\int f(p)\overline{\chi_k(p)}\,dp,$$

где $\chi_k(p)$ — непрерывный характер группы T_f, являющийся пространственным расширением функции $e^{i\Delta_k x}$.

Теорема 4 (единственности). *Если какой-нибудь из рядов Фурье L-п. п. функции $f(x)$ совпадает с каким-нибудь из рядов Фурье L-п. п. функции $f_1(x)$, то $f(x)\equiv f_1(x)$.*

Доказательство основано на том, что модуль функции $\mathfrak{M}_f$, а значит и группа T_f вполне определяются любым рядом Фурье этой функции. Таким образом, разность $f(p)-f_1(p)$ пространственных расширений функций $f(x)$ и $f_1(x)$, отвечающих данному ряду Фурье, есть функция на T_f, непрерывная во всех точках Ω_f. Эта разность ортогональна ко всем непрерывным характерам группы T_f и, следовательно, ко всем непрерывным на T_f функциям. Отсюда следует, что $f(p)-f_1(p)=0$ во всех точках непрерывности и, в частности, на Ω_f. Иначе, $f(x)\equiv f_1(x)$ $(-\infty<x<\infty)$.

Строя сингулярные интегралы на группе T_f, можно также дать различные методы суммирования L-п. п. функций, причем апроксимацию следует понимать в том же смысле, что и в теореме 3.

Заметим, что все наше построение несущественно изменится, если вместо функций, определенных на числовой оси, рассматривать функции на произвольной, вообще говоря, некоммутативной группе.

Теорема 5. *Если у L-п. п. функции $f(x)$*

$$\lim_{T\to\infty}\left(\operatorname{Inf}_{\alpha}\frac{1}{2T}\int_{-T+\alpha}^{T+\alpha}|f(x)|\,dx\right)<\infty, \tag{8}$$

то она имеет суммируемое пространственное расширение.

Это расширение можно построить, представив функцию в форме $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ ($f_+(x)=f(x)$ при $f(x)>0$; $f_+(x)=0$ при $f(x)\leqslant 0$ и доопределив $f_+(x)$ и $f_-(x)$ как полунепрерывные снизу.

Функция

$$P(x)=\frac{2}{2+\cos x+\cos\Delta x}\quad(\Delta \text{ иррационально})$$

дает пример L-п. п. функции, не допускающей суммируемого пространственного расширения.

Поступило
29 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Левитан, Зап. Харьковск. матем. об-ва, 15, 2 (1939). [2] Г. Бор, Почти-периодические функции, 1934. [3] В. Марченко, ДАН, 53, № 1 (1946). [4] Б. Левитан, Усп. матем. наук, 2 (22), 190 (1947). [5] J. Favard, Leçons sur les fonctions presque-périodiques, 1933.