Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. ДЖРБАШЯН

О ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИМЫХ СОВОКУПНОСТЯХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 10 VIII 1948)

Пусть E — произвольная линейная измеримая совокупность точек, лежащая в плоскости комплексного переменного z.

Класс функций, определенных на E и интегрируемых вместе с квадратом модуля, обозначим через $L_2(E)$.

Пусть $\{u_n(z)\}$ — некоторая счетная последовательность функций, принадлежащих к классу $L_2(E)$. Если для произвольной функции $f(z) \in L_2(E)$

$$\inf_{\{U\}} \int_E |f(z) - U(z)|^2 \, d\sigma = 0,$$

где $\{U(z)\}$ — всевозможные линейные комбинации вида $\sum_1^m a_k u_k(z)$, то будем говорить, что система функций $\{u_n(z)\}$ полна в классе $L_2(E)$.

В настоящей заметке мы приводим предложение о полноте некоторых систем аналитических функций на определенных классах линейных измеримых совокупностей, лежащих в плоскости комплексного переменного.

1°. Условимся говорить, что функция $\varphi(r) > 0$ $(r > 0)$ принадлежит к классу $\{h_0(r)\}$, если существует неотрицательная функция $h_0(r)$ такая, что

$$\varphi(r) \geqslant h_0(r) \quad \text{при} \quad r \geqslant r_0$$

и

$$h_0(r) = h_0(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{\omega(t)}{t} \, dt \quad \text{при} \quad r \geqslant r_0,$$

где $\omega(t) \geqslant 0$ не убывает и $\lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t) = +\infty$.

Пусть измеримое множество E лежит на полупрямых L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, которые разбивают плоскость на конечное число неограниченных односвязных областей G_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Предположим, что каждая из этих областей G_k содержит некоторый угол с положительным раствором π/α_k $(1/2 < \alpha_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, m)$.

Здесь и в дальнейшем через $E(r)$ будем обозначать множество тех точек E, которые лежат вне круга $|z| < r$.

Теорема 1. *Если функция* $\log \frac{1}{\operatorname{mes} E(r)}$ *принадлежит к классу* $\{h_0(r)\}$ *и интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{h_0(r)}{r^{1+\alpha}}\, dr, \quad \text{где} \quad \alpha = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \{\alpha_k\}$$

расходится, то система полиномов полна в классе $L_2(E)$.

Следствие 1. Если, в частности,

$$\log \operatorname{mes} E(r) \leqslant - \frac{r^{\alpha}}{\log r \log_2 r \ldots \log_{\nu} r} \quad \text{при} \quad r \geqslant r_1,$$

где $\log_k r = \log(\log_{k-1} r)$ и $\nu \geqslant 1$ — любое целое число, то система полиномов полна в классе $L_2(E)$.

2°. Пусть C_+ и C_- — две кривые в плоскости z, соответственно представимые непрерывными функциями

$$y = \Phi_+(x), \quad y = \Phi_-(x); \quad x \geqslant x_0; \quad \Phi_+(x) > \Phi_-(x).$$

Пусть C_1 — жорданова дуга, лежащая в полуплоскости $x \leqslant x_0$ и соединяющая концы кривых C_+ и C_-. Кривые C_+, C_- и C_1 разбивают плоскость на две области. Обозначим через S ту из указанных областей, которая содержит область

$$\Phi_-(x) < y < \Phi_+(x), \quad x_0 < x < \infty.$$

Следуя С. Е. Варшавскому [1], назовем область S простой жордановой полосой.

Пусть $S_{\alpha}(a, b)$ — простая жорданова полоса, лежащая в полуплоскости $x \geqslant x_0$, для которой при $x \geqslant x_1 \geqslant x_0$

$$\Phi_+(x) = a x^{\alpha}, \quad \Phi_-(x) = b x^{\alpha} \quad (b < a, \ \alpha < 1).$$

Теорема 2. *Если измеримое множество* E *лежит на границе полосы* $S_{\alpha}(a, b)$ *и удовлетворяет условиям:*

1) $\log \frac{1}{\operatorname{mes} E(r)} \in \{h_0(r)\}$;

2) *функция*

$$\frac{\omega(r)}{r^{\gamma}} \exp\left\{-\eta \int^{r} \frac{\omega(t)}{t}\, dt\right\}$$

для некоторого $\gamma \geqslant 1$ *и* $0 < \eta < 1$ *ограничена, когда* $r \to +\infty$;

3) $\int^{\infty} h_0(r) \exp\left\{-\frac{\pi r^{1-\alpha}}{(a-b)(1-\alpha)}\right\} \frac{dr}{r^{\alpha}} = +\infty$,

то система полиномов полна в классе $L_2(E)$.

Следствие 2. Если, в частности, при $r \geqslant r_1$

$$\log \operatorname{mes} E(r) \leqslant \frac{\exp\left\{\frac{\pi r^{1-\alpha}}{(a-b)(1-\alpha)}\right\}}{r^{1-\alpha} \log r \log_2 r \ldots \log_{\nu} r},$$

где $\nu \geqslant 1$ любое, то система полиномов полна в классе $L_2(E)$.

3°. Пусть $\Delta_p(a, b)$ — простая жорданова полоса, лежащая в полуплоскости $x \geqslant x_0$, для которой при $x \geqslant x_1 \geqslant x_0$

$$\Phi_+(x) = \frac{ax}{(\log x)^p}, \quad \Phi_-(x) = \frac{bx}{(\log x)^p} \quad (b < a, \ p > 1).$$

Теорема 3. *Если измеримое множество E, лежащее на границе полосы $\Delta_p(a, b)$, удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 2 и, кроме того, интеграл*

$$\int^{\infty} h_0(r) e^{-\mu(\log r)^{p+1}} \frac{(\log r)^p}{r} dr,$$

где $\mu = \dfrac{\pi}{(p+1)(a-b)}$, *расходится, то система полиномов полна в классе $L_2(E)$.*

Следствие 3. Если, в частности, при $r \geqslant r_1$

$$\log \operatorname{mes} E(r) \leqslant -\frac{e^{\mu(\log r)^{p+1}}}{\log_2 r \ldots \log_\nu r} (\log r)^{p-1},$$

то система полиномов полна в классе $L_2(E)$.

4°. Рассмотрим систему функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в плоскости z, разрезанной вдоль полуоси $(-\infty, 0)$, где $\{\lambda_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть угол Δ_α с вершиной в начале координат и с раствором $\pi\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 2)$ лежит в плоскости z, разрезанной вдоль полуоси $(-\infty, 0)$.

Пусть полупрямые L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ не имеют общих точек, лежат внутри или на границе угла Δ_α (в случае $\alpha = 0$ имеем одну полупрямую).

Мы полагаем, что функция

$$\psi(r) = \exp\left\{2 \sum_{\lambda_n < r} \lambda_n^{-1}\right\},$$

введенная W. H. Fuchs'ом (2) для исследования полноты системы $\{e^{-x} x^{\lambda_n}\}$ на полуоси $(0, +\infty)$, удовлетворяет следующим условиям: существует неубывающая функция $h(r)$ такая, что

$$\frac{\psi(r)}{r^\alpha} \geqslant h(r) \quad \text{при} \quad r \geqslant r_1.$$

Теорема 4. *Если измеримое множество E лежит на полупрямых L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и при $r \geqslant r_0$*

$$\log \operatorname{mes} E(r) \leqslant -\mu r^p \quad (\mu > 0, \ p > 0),$$

то при расходимости интеграла

$$\int^{\infty} \frac{h^p(r)}{r^2} dr$$

система функций $\{z^{\lambda_n}\}$ полна в классе $L_2(E)$.

Следствие 4. Если, в частности,

$$\liminf_{r \to \infty} \left\{ \sum_{\lambda_n < r} \lambda_n^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \alpha\right) \log r \right\} > -\infty,$$

то система $\{z^{\lambda_n}\}$ полна в классе $L_2(E)$.

Если множество E лежит на границе угла Δ_α, то теорема 4 остается в силе, когда $p \geqslant 1/\alpha$.

5°. Пусть $g(z)$ — целая функция порядка ρ и типа σ, для которой $g^{(k)}(0) \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Пусть измеримое множество E лежит на границе полосы $S_\alpha(a, b)$, определенной в п. 2°.

Теорема 5. *Если при* $r \geqslant r_0$

$$\log \operatorname{mes} E(r) \leqslant -\mu \exp\left\{\frac{\pi r^{1-\alpha}}{(a-b)(1-\alpha)}\right\} \qquad (\mu > 0)$$

и числовая функция $n(t)$ *последовательности комплексных чисел* $\{a_n\}$ *удовлетворяет условию*

$$\limsup_{r \to +\infty} r^{-\rho} (\log r)^{-\frac{\rho}{1-\alpha}} \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt > \sigma \left[\frac{\rho(a-b)(1-\alpha)}{\pi}\right]^{\frac{\rho}{1-\alpha}},$$

то система функций $\{g(a_n z)\}$ *полна в классе* $L_2(E)$.

Институт математики и механики
Академии Наук Армянской ССР

Поступило
1 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. E. Warschawski, Trans. Am. Math. Soc., 51, № 2 (1942). [2] W. H. Fuchs, Proc. Cambridge Phil. Soc., 42 (1946).