Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 4

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Член-корреспондент АН СССР И. С. БРУК

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ МИНИМИЗАТОР

1. Рассмотрим систему линейных уравнений с вещественными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, \quad i=1,\ 2, \ldots,\ n. \tag{1}$$

Выражение

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - b_i\right)^2 \tag{2}$$

достигает минимума, равного нулю, если вектор $X=\{x_j\}$ является решением системы (1).

Вычислительный процесс сводится к минимизации H, начиная с некоторых начальных произвольных значений $X^0=\{x_j^0\}$. Процесс

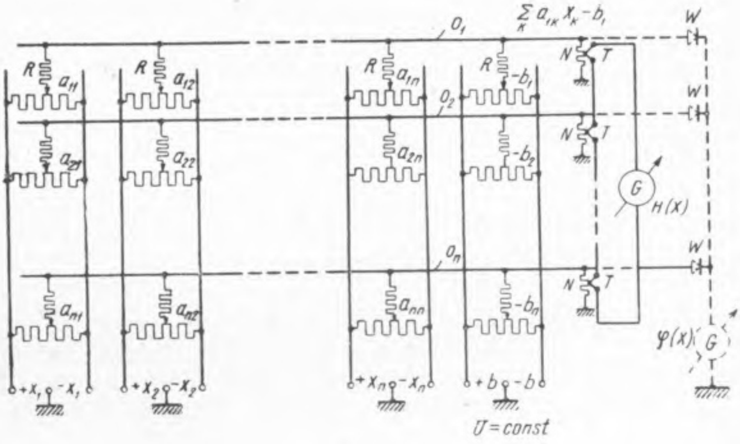

Рис. 1

последовательных приближений сводится к решению системы (1), если оно единственно; к решению с минимальным среднеквадратичным отклонением, если система (1) не имеет решения ([1]).

Процесс минимизации $H(X)$ может быть реализован при помощи сравнительно простой электрической схемы, показанной на рис. 1. $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ — шины, напряжения которых относительно точки нулевого потенциала пропорциональны значениям неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Шины b служат для питания потенциометров, с которых снимаются напряжения, пропорциональные b_i в системе (1). Значения $a_{ik}x_k$ получаются в виде напряжений, снимаемых с потенциометров, приключенных к шинам x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. a_{ik} может плавно изменяться от нуля до ± 1.

Точно так же устанавливаются значения b_i. Напряжения, снимаемые с каждого из потенциометров, суммируются при помощи одинаковых больших сопротивлений R (рис. 1) вдоль каждой „строки". К узловым точкам O_i каждой строки приключены нагревательные элементы термопреобразователей (N). Термопары T соединены последовательно с гальванометром G. Питание схемы — от сети переменного тока.

Отклонение гальванометра G пропорционально значению $H(X)$. Оператор, начав с каких-либо начальных значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, изменяет напряжения на шинах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы отклонение гальванометра G уменьшалось.

Вместо (2) будем рассматривать выражение

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right|. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что если X является решением системы (1), то $\varphi(X)=0$. Если система (1) не имеет решения, то при наименьшем значении $\varphi(X)$ получим решение с минимальным значением суммы модулей отклонений.

Процесс минимизации $\varphi(X)$ может быть реализован в простой электрической схеме, аналогичной рассмотренной для $H(X)$. Если в схеме на рис. 1 заменить термопреобразователи выпрямителями W, как показано на рис. 1 пунктиром, то отклонение гальванометра G будет пропорционально $\varphi(X)$*. Процесс минимизации осуществляется оператором так же, как и в случае $H(X)$.

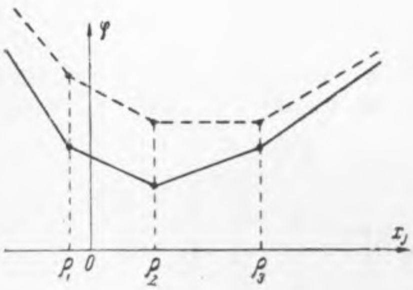

Рис. 2

При изменении значения одной из переменных x_j и неизменном значении остальных $\varphi(X)$ изменяется в зависимости от x_j, как показано на рис. 2. $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — значения x_j, обращающие в нуль одну из строк $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i$. При этом возможны два случая:

а) Наименьшее значение $\varphi(X)$ достигается в точке (ρ_2 на рис. 2).

б) Наименьшее значение лежит в интервале между двумя нулями модуля двух строк (ломаная, показанная пунктиром на рис. 2). В последнем случае имеется, очевидно, участок, параллельный оси абсцисс. Минимизируя $\varphi(X)$ следует в случае б) остановиться на значении x_j между ρ_k и ρ_{k+1} и переходить к минимизации $\varphi(X)$ путем изменения значения другой переменной.

2. Рассмотренную выше электрическую схему можно использовать для определения вещественных собственных значений матрицы коэффициентов системы (1). Задача сводится к решению системы:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \lambda x_i. \tag{4}$$

---

* В действительности выпрямители включаются через усилители, опущенные для простоты на рис. 1.

Правые части системы (4) в отличие от (1) задаются от шин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи потенциометров, связанных друг с другом так, что λ одинаково для всех строк. Задаваясь различными значениями λ и минимизируя $\varphi(X)$, найдем значения λ, при которых $\varphi(X)=0$, и значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — составляющих собственного вектора. Процесс минимизации необходимо, очевидно, проводить при соблюдении еще одного условия — например постоянства длины вектора X, т. е. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\text{const}$ или даже постоянства одной из составляющих X.

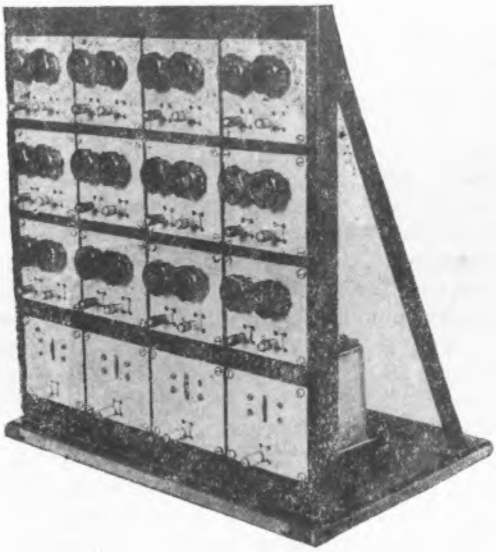

Рис. 3

При $a_{ik} \neq a_{ki}$ или при комплексных a_{ik} как λ, так и соответствующие значения составляющих собственного вектора могут быть комплексными. В этом случае задача сводится к рассмотрению системы $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными при вещественных коэффициентах. Приемом, аналогичным рассмотренному выше, отыскиваются вещественная и мнимая части $\lambda=\varepsilon+i\mu$.

3. В известных электрических схемах, в которых процесс решения системы (1) осуществляется путем последовательного обращения в нуль каждой строки (1), сходимость итерационного процесса в общем случае обеспечивается преобразованием предложенной системы, приводящим при значительном числе неизвестных к большому объему вычислений.

Рассмотренный метод не требует преобразования исходной системы, так как итерационный процесс всегда сходится и может быть даже автоматизирован.

Рассмотрим возможности автоматизации минимизатора для $\varphi(X)$. Процесс осуществляется вручную оператором так, что

$$\operatorname{sign} \Delta x_k = -\operatorname{sign} \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_k}. \tag{5}$$

При регулировании по схеме „да“ „нет“ достаточно определить знак $\partial\varphi(X)/\partial x_k$.

Для системы (1)

$$\operatorname{sign} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \operatorname{sign}\left(a_{1k} \operatorname{sign} \Sigma^{(1)} + a_{2k} \operatorname{sign} \Sigma^{(2)} + \ldots\right). \tag{6}$$

Знак каждой „строки“ ($\operatorname{sign}\Sigma^{(i)}$) определяется фазой напряжения узловых точек O_i на рис. 1 и может быть установлен при помощи n фазовых дискриминаторов (по числу строк). Управляющий сигнал для автоматического регулятора, действующего по уравнению (5), получается суммированием постоянных напряжений $\pm a_{ik}$. При непрерывном регулировании вместо (5) получим:

$$\frac{d\Delta x_k}{dt} - \alpha^2 \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_k}, \tag{7}$$

где α^2 — постоянная.

Условие (7) может быть реализовано в электрической схеме, где напряжение u_k на клеммах регулирующего двигателя для k-й переменной определяется:

$$u_k = -\beta^2 (a_{1k}\Sigma^{(1)} + a_{2k}\Sigma^{(2)} + \ldots),$$

где β — постоянная.

4. Рассмотренный метод можно применить для приближенного решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с заданными начальными и краевыми условиями ([1]). Если предложено интегрировать уравнение $L(x, y, y', y^n)=0$ в промежутке a, b при условии $f_1(a, b) = f_2(a, b) = \ldots = f_n(a, b) = 0$, где $f_1, \ldots, f_n$ — линейные функции производных различных порядков, то задача сводится к минимизации выражения $\left[\int\limits_a^b L^2 dx + f_1^2 + \ldots + f_n^2\right]$ или $\left[\int\limits_a^b |L|\, ax + |f_1| + \ldots\right.$ $\left.\ldots + |f_n|\right]$ в зависимости от того, воспользуемся ли мы схемой минимизации H или φ.

Представив $y(x)$ в виде полинома с неопределенными коэффициентами и выбрав в промежутке $a - b$ некоторое число абсцисс соответственно степени интерполирующего полинома, получим, воспользовавшись для интеграла формулой механических квадратур, систему линейных уравнений для определения коэффициентов полинома. Решая систему методом минимизации, найдем приближенное решение предложенного уравнения.

Можно воспользоваться и тригонометрическим полиномом для представления $y(x)$. Несколько видоизменяя метод усиления сходимости тригонометрических рядов, предложенный акад. А. Н. Крыловым ([2]), можно составить общее выражение для функции с нужным числом производных в виде ряда, допускающего почленное дифференцирование. Задача сводится опять к решению системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов ряда.

Описанный метод может быть с успехом применен также для решения линейных уравнений в частных производных, интегральных уравнений, гармонического анализа и некоторых задач теории регулирования. Прибор для минимизации $\varphi(X)$ был осуществлен для системы с 3 неизвестными.

Испытания показали, что процесс минимизации осуществляется быстро, но требует повышения чувствительности нуль-индикатора по мере уменьшения φ. На основе полученных результатов будет сооружен минимизатор для большого числа переменных.

Автор выражает признательность своим сотрудникам И. А. Коколевскому и Н. В. Паутину за помощь, оказанную ими при разработке и испытании прибора.

Поступило
24 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, ДАН, 48, № 7 (1945). [2] А. Н. Крылов, Диф. уравнения матем. физики, изд. АН СССР, 1932, стр. 255.