Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 4

ФИЗИКА

А. А. КОЛОСОВ

ПОЛОСА ШУМОВ МНОГОКАСКАДНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 20 VII 1948)

1. Весьма существенный для теории радиоприема вопрос о полосе шумов многокаскадных селективных систем вовсе не был освещен ни в отечественной, ни в иностранной литературе. В связи с этим представляет интерес рассмотрение этого вопроса здесь.

Известно, что полоса шумов, которую мы в дальнейшем будем обозначать через П, может быть определена соотношением

$$\Pi = \int_0^\infty \frac{df}{\sigma^2(f)}. \tag{1}$$

где $\sigma(f)$ — коэффициент избирательности системы. Согласно (1), полоса шумов характеризуется основанием прямоугольника, равновеликого площади, ограниченной квадратом резонансной кривой и осью абсцисс.

2. Рассмотрим n-каскадный резонансный усилитель. Будем считать, что усилитель имеет одиночные, настроенные в резонанс контуры с равными параметрами. Тогда в соответствии с (1) полоса шумов подобного усилителя определяется из соотношения

$$\Pi = \int_0^\infty \frac{df}{\sigma_1^{2n}(f)}, \tag{2}$$

где n — число каскадов, а $\sigma_1(f)$ — коэффициент избирательности одного каскада. Подставляя вместо $\sigma_1(f)$ его известное выражение, соответствующее случаю больших расстроек, получим:

$$\Pi = \int_0^\infty \frac{df}{\{(f/f_0)^2[1+(f/f_0-f_0/f)^2Q^2]^n} =$$

$$= f_0 \int_0^\infty \frac{dx}{[x^2+(x^2-1)^2Q^2]^n} = f_0 I_n,$$

где

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{[x^2+(x^2-1)^2Q^2]^n}. \qquad (x = f/f_0). \tag{3}$$

Интеграл (3) можно вычислить, пользуясь теорией вычетов; именно, если Q — добротность контура,

$$I_{n+1}=\frac{\pi}{2Q}\frac{1}{Q^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{k,n}}{k+1}\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}Q^{2k}, \tag{4}$$

где $A_{k,n}$ определяются из соотношения

$$\frac{d}{dz}(2\xi)^{k+1}=\sum_{n=k}^{\infty}A_{k,n}z^n. \tag{5}$$

Здесь

$$2\xi=2(1-\sqrt{1-z})=z+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{8}z^3+$$
$$+\frac{5}{64}z^4+\frac{7}{128}z^5+\frac{21}{518}z^6+\ldots \tag{6}$$

3. Пользуясь (4), можно определить полосу шумов n-каскадного усилителя. Для значений n от 1 до 6 при этом получатся следующие данные:

$$\begin{aligned}
&n=1;\quad \Pi_1=\frac{f_0\pi}{2Q};\\
&n=2;\quad \Pi_2=\frac{f_0\pi}{2Q}\frac{1}{Q^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Q^2\right];\\
&n=3;\quad \Pi_3=\frac{f_0\pi}{2Q}\frac{1}{Q^4}\left[\frac{3}{8}+\frac{3}{8}Q^2+\frac{3}{8}Q^4\right];\\
&n=4;\quad \Pi_4=\frac{f_0\pi}{2Q}\frac{1}{Q^6}\left[\frac{5}{16}+\frac{5}{16}Q^2+\frac{3}{8}Q^4+\frac{5}{16}Q^6\right];\\
&n=5;\quad \Pi_5=\frac{f_0\pi}{2Q}\frac{1}{Q^8}\left[\frac{35}{128}+\frac{35}{128}Q^2+\frac{45}{128}Q^4+\frac{25}{64}Q^6+\frac{35}{128}Q^8\right];\\
&n=6;\quad \Pi_6=\frac{f_0\pi}{2Q}\frac{1}{Q^{10}}\left[\frac{63}{256}+\frac{63}{256}Q^2+\frac{21}{64}Q^4+\frac{105}{256}Q^6+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{105}{256}Q^8+\frac{63}{256}Q^{10}\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Соотношения для полосы шумов при $n>6$, вычисленные на основании (4), здесь не приведены ввиду их громоздкости.

4. Формулы (7) для полосы шумов относятся к широкополосным усилителям, в которых применяются контуры с малым Q. В случае узкополосных усилителей, при больших Q, результаты существенно упрощаются.

Нетрудно показать, что здесь полоса шумов для n-каскадного усилителя будет определяться следующим образом:

$$\Pi_n=\frac{f_0\pi}{2Q}\frac{(2m)!}{(2^m m!)}=\frac{f_0\pi}{2Q}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\ldots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\ldots2m}, \tag{8}$$

где $m=n-1$.

Последней формулой можно пользоваться при $Q>10$ с погрешностью, не превышающей 1%.

5. Произведем сравнение полосы шумов с «полосой пропускания» ΔF. Из известных соотношений для коэффициента избирательности легко получить следующую формулу для полосы пропускания усилителя с n каскадами:

$$\Delta F = \frac{f_0}{Q}\sqrt{\sigma_\Sigma^{2/n} - 1}, \qquad (9)$$

где $\sigma_\Sigma = K_0 / K_{\Delta f}$ — неравномерность усиления в пределах полосы для всей системы.

Обычно принимают, что в пределах полосы всей системы неравномерность усилителя не должна превышать $\sqrt{2}$.

Тогда

$$\Delta F = \frac{f_0}{Q}\sqrt{2^{1/n} - 1}.$$

Обозначим через $\varkappa$ отношение полосы шумов П к полосе пропускания ΔF при $\sigma_\Sigma = \sqrt{2}$. Тогда мы получим следующие данные (табл. 1).

Таблица 1

Число каскадов	$\varkappa$	Число каскадов	$\varkappa$	Число каскадов	$\varkappa$
1	1,57079	6	1,10464	13	1,08187
2	1,22033	7	1,09832	16	1,07847
3	1,15539	8	1,09372	19	1,07618
4	1,12850	9	1,09021	22	1,07453
5	1,11385	10	1,08746	28	1,07232

Таким образом, полоса шумов многокаскадного усилителя с одиночными контурами не очень сильно отличается от полосы пропускания. При $n > 6$ это различие не превышает 10%.

6. Переходя к бесконечно большому числу каскадов, рассмотрим $\lim \varkappa_n \to \infty$.

Имеем ($m = n - 1$):

$$\lim_{n\to\infty} \varkappa = \lim \left[\frac{\pi}{2}\,\frac{(2m)!}{(2^m\,m!)\sqrt{2^{1/(m+1)} - 1}}\right].$$

Учитывая, что

$$m! = \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}\left(1 + \frac{1}{12m} + \cdots\right),$$

можем написать:

$$\varkappa = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2m/e)^{2m}\sqrt{4\pi m}\,(1 + 1/24m + \cdots)}{\sqrt{2^{1/(m+1)} - 1}\cdot 2^{2m}\,(m/e)^{2m}\,2\pi m\,(1 + 1/6m + \cdots)},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \varkappa = \sqrt{\pi / \ln 16} = 1{,}064467.$$

Сопоставление найденной величины $\varkappa$ при бесконечно большом числе каскадов с данными таблицы показывает, что при увеличении числа каскадов от $n = 6$ до $n = \infty$ $\varkappa$ изменяется только примерно на 4%.

7. Из изложенного видно, что полоса шумов одноконтурного усилителя с большим числом каскадов лишь на несколько процентов превышает его полосу пропускания в случае, когда степень неравномерности σ в пределах полосы пропускания принята равной $\sqrt{2}$ (3 дб). Для узкополосного усилителя при $n = \infty$ это превышение соответствует 6,5%. При малом же числе каскадов различие между полосой шумов и полосой пропускания становится значительным. Для одного каскада полоса шумов больше полосы пропускания в $\pi/2$ раз.

Поступило
12 VII 1948