Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

А. М. ФАЙНЗИЛЬБЕР

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ХИМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 8 VII 1948)

1. Настоящая работа посвящена одной из проблем химической динамики — проблеме моделирования движения коллоидных растворов.

При рассмотрении макроскопического движения коллоидных растворов существенное значение приобретает влияние концентрации раствора на его вязкость. Уравнение движения вязкой жидкой среды, как известно, имеет вид ([1])

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (1)$$

Здесь u и v — компоненты скорости потока, удовлетворяющие также условию несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad (2)$$

ν — коэффициент вязкости, являющийся функцией концентрации раствора c.

Для того чтобы получить зависимость концентрации от распределения скоростей, воспользуемся граничными условиями задачи.

На обтекаемой поверхности

$$u=0, \qquad c=c_0. \qquad (3)$$

Вдали от поверхности обтекаемого профиля (где трение отсутствует)

$$u=\bar{u}, \qquad c=c, \qquad (4)$$

где $\bar{c}$ — значение концентрации вдали от обтекаемой поверхности.

Рассматривая случай нерастворимой поверхности, далее имеем

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{y=0}=0. \qquad (5)$$

В силу (3), (4) и (5) разложение c по u имеет вид

$$c=c_0+\frac{(\bar{c}-c_0)\,u^2}{\bar{u}^2}. \qquad (6)$$

Зависимость вязкости от концентрации выражается у коллоидных растворов формулой вида ([2])

$$\nu=(\alpha+\beta c)^n, \qquad (7)$$

где α, β и n — некоторые константы, причем константы α и β зависят от вида раствора, что же касается константы n, то Эйнштейн получил для нее теоретически ([2]) универсальное значение $n=1$. В настоящей работе мы, чтобы не ограничивать общности рассуждения, будем решать задачу для любого значения n.

В силу (6) и (7) уравнение (1) может быть записано

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(A+Bu^2)^n\frac{\partial u}{\partial y}\right], \tag{8}$$

где A и B — новые константы, выражающиеся через старые константы α и β при помощи формул

$$A=\alpha+c_0\beta, \qquad B=\frac{\bar{c}-c_0}{\bar{u}^2}\beta.$$

Уравнению несжимаемости (2) можно удовлетворить, введя функцию тока $\psi(x, y)$ по формулам

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{8a}$$

2. Приведение теории движения коллоидных растворов к уравнению вида теплопроводности. Перейдем в уравнении (8) от независимых переменных x и y к новым независимым переменным

$$x_1=\frac{x}{\sqrt{B}}, \qquad \psi$$

и введем также новую зависимую переменную

$$z=(A+Bu^2)^{n+1}. \tag{9}$$

В силу формул перехода от старых переменных к новым имеем

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

и, в силу (8a) и (9), окончательно получаем

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2B\sqrt{B}}\frac{1}{n+1}z^{-\frac{n}{n+1}}\frac{\partial z}{\partial x_1}.$$

Аналогично находим для правой части

$$(A+Bu^2)^n\frac{\partial u}{\partial y}=z^{\frac{n}{n+1}}u\frac{\partial u}{\partial\psi}=\frac{1}{2B(n+1)}\frac{\partial z}{\partial\psi},$$

и, в силу (9), получаем для правой части выражение

$$\frac{1}{n+1}\frac{1}{2B}u\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}.$$

Уравнение (8), следовательно, записывается

$$z^{-\frac{n}{n+1}}\frac{\partial z}{\partial x_1}=\sqrt{B}\,u\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}.$$

Полагая в (9) $u=0$ и обозначая значение z на поверхности через z_0, находим

$$z_0 = A^{n+1}. \tag{9'}$$

Сопоставление (9) и (9') дает выражение u через z по формуле

$$u = \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{z^k - z_0^k}. \tag{9''}$$

Здесь $k = \dfrac{1}{n+1}$.

Заметим, что, по Эйнштейну, $n = 1$, и, следовательно, $k = 1/2$. В силу (9") уравнение (8') принимает вид

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = z^{1-k} \sqrt{z^k - z_0^k}\, \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2}.$$

Вводя далее

$$z_1 = z/\bar{z}$$

и переходя также к переменной

$$X = \bar{z}^{\,1-\frac{k}{2}}\, x_1,$$

окончательно получаем уравнение

$$\frac{\partial z_1}{\partial X} = z_1^{1-k} \sqrt{z_1^k - z_{10}^k}\, \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2}. \tag{10}$$

Граничные условия уравнения (10) суть

$$\text{при } \psi = 0 \qquad z_1 = z_{10} = m^{1/k}; \tag{11}$$

$$\text{при } \psi = \infty \qquad z_1 = 1, \tag{12}$$

где

$$m = \frac{A}{A + B\bar{u}^2} = \frac{1 + c_0 \beta/\alpha}{1 + \bar{c}\,\beta/\alpha}.$$

3. Моделирование движения коллоидных растворов. Уравнение (10) показывает, что задача движения коллоидных растворов может моделироваться задачей распространения тепла в стержне (роль времени играет переменная x, роль координаты — функция тока ψ и роль температуры — переменная z_1).

Рассмотрение системы (10)—(12) позволяет получить также и другой метод моделирования — раствором нулевой концентрации (т. е. обычной жидкостью).

Если рассматривать „внешнюю" область (область, удаленную от обтекаемой поверхности), то для нее можно положить в уравнении (10) $z_1 \approx 1$, и уравнение сводится к обычной квадратуре уравнений теплопроводности.

Для „внутренней" области (области, близкой к поверхности) можно указать метод решения уравнения (10), основанный на моделировании жидкостью.

Действительно, в случае раствора нулевой концентрации ($c = 0$) вязкость ν, согласно (7), является константой, т. е. $n = 0$, и, следовательно, $k = 1$, и уравнение (10) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial z_1}{\partial X} = \sqrt{z_1 - z_{10}}\, \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2}. \tag{13}$$

Граничные условия уравнения (13) суть:

$$\text{при } \psi = 0 \qquad z_1 = z_{10} = m; \tag{11'}$$

$$\text{при } \psi = \infty \qquad z_1 = 1. \tag{12'}$$

Если ввести далее новую переменную

$$X = \frac{1}{\sqrt{k}} m^{-\frac{1-k}{2k}} \sqrt{\frac{1-m}{1-m^{1/k}}} \bar{z}^{1-\frac{k}{2}} x_1$$

и новую функцию

$$Z = \frac{m^{1/k} - m}{1-m} + \frac{1-m^{1/k}}{1-m} z_1,$$

то уравнение (13) запишется

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \sqrt{k}\, m^{\frac{1-k}{2k}} \sqrt{Z - Z_0}\, \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2}. \tag{14}$$

Граничные условия (11') и (12') примут вид

$$\text{при } \psi = 0 \qquad Z = m^{1/k}; \tag{15}$$

$$\text{при } \psi = \infty \qquad Z = 1. \tag{16}$$

Таким образом, граничные условия уравнений (10) и (14) совпадают.

Сравним теперь коэффициенты в уравнениях (10) и (14).

Составляя отношение этих коэффициентов

$$F(z) = \frac{\sqrt{z_1^k - z_{10}^k}\sqrt{z_{10}^{k-1}}}{z_1^{k-1}\sqrt{k}\sqrt{z_1 - z_{10}}},$$

видим, что для $z = z_0$ $F(z)$ по правилу Лопиталя равно единице. В силу непрерывности $F(z)$ для z, близких к z_0 („внутренняя" область), имеем

$$F(z) \approx 1,$$

т. е. уравнения (10) и (14) весьма близки друг другу, и так как граничные условия их также сопадают, то оказывается возможным моделирование движения коллоидных растворов движением жидкости.

Другие методы интегрирования систем типа (10)—(12) затронуты в нашей работе (4).

Поступило
28 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 3. [2] Э. Гатчек, Вязкость жидкостей, 1935. [3] А. М. Файнзильбер, ДАН, 48, № 7 (1945). [4] А. М. Файнзильбер, ДАН, 48, № 8 (1945). [5] А. М. Файнзильбер, ДАН, 51, № 7 (1946). [6] А. М. Файнзильбер, ДАН, 51, № 8 (1946). [7] А. М. Файнзильбер, ДАН, 59, № 4 (1948).