Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. МЕЙМАН

О НУЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 VII 1948)

Все обозначения и определения остаются такими же, как и в предыдущей заметке ([1]).

При определении класса B (см. ([1])) предполагалось, что функции $F(z)=g(z)+ih(z)$ обладают тем свойством, что компоненты $g(z)$ и $h(z)$ не имеют общих нулей, или, другими словами, если $F(z_0)=0$, то $F(\bar{z}_0)\neq 0$. Это ограничение имеет то неудобство, что произведение двух фучкций класса B может не принадлежать классу B.

Определение. Функция $\Phi(z)=u(z)+iv(z)$ называется функцией класса $\bar{B}$, если мероморфная функция $\zeta(z)=\frac{g(z)+ih(z)}{g(z)-ih(z)}$ ограничена для достаточно далеких точек верхней полуплоскости.

Всякая функция класса $\bar{B}$ имеет вид

$$\Phi(z)=d(z)F(z),$$

где $d(z)$ — произвольная вещественная целая функция, а $F(z)\in B$ Это позволяет любую теорему, доказанную для класса B, переводить в теорему для класса $\bar{B}$.

Лемма. *Пусть $\Phi(z)=u(z)+iv(z)\in\bar{B}$. Число комплексных нулей каждой из ее компонент $u(z)$ и $v(z)$ не превосходит удвоенного числа нулей $\Phi(z)$ в нижней полуплоскости.*

Доказательство. Пусть $\Phi(z)=d(z)F(z)$, где $F(z)=g(z)+ih(z)\in B$. Из определения символа $S(h, g)$ (см. ([1])) следует, что

$$S(h, g)\geqslant\max(r, t),$$

где r и t — число сопряженно-комплексных пар нулей функций $g(z)$ и $h(z)$ (считая их кратность). Согласно теореме 1 заметки ([1]), число нулей функции $\Phi(z)$ в нижней полуплоскости равно $S(h, g)+q$, где $2q$ — число комплексных нулей функции $d(z)$, что доказывает лемму.

Теорема 1. *Если функции $R(z)=P(z)+iQ(z)$ и $F(z)=g(z)+ih(z)$ принадлежит классу B, то число комплексных нулей каждой из функций $P(z)g(z)-Q(z)h(z)$ и $P(z)h(z)+Q(z)g(z)$ не превосходит $2[S(Q, P)+S(h, g)]$.*

Доказательство непосредственно следует из леммы.

Н. Г. Чеботарев ([2]) ввел понятие вещественной пары, а именно: две целые вещественные функции $g(z)$ и $h(z)$ без общих нулей называются вещественной парой, если при любых вещественных λ и μ все корни линейных комбинаций $\lambda g(z)+\mu h(z)$ вещественны.

Компоненты целой функции $F(z)=g(z)+ih(z)$ класса HB образуют вещественную пару; обратно, если $g(z)$ и $h(z)$ образуют вещественную пару, то одна из функций $F(z)=g(z)+ih(z)$ или $\overline{F}(z)=g(z)-ih(z)$ принадлежит классу HB [2,3].

Теорема 2. *Пусть $g(z)$ и $h(z)$ образуют вещественную пару, а $P(z)$ и $Q(z)$ — произвольные вещественные полиномы степени $m+2p$ и $n+2q$ — имеют, соответственно, $2p$ и $2q$ комплексных нулей и $m+2p\leqslant n+2q$. Функция $P(z)g(z)+Q(z)h(z)$ имеет не более $2(n+q)$ комплексных нулей, если $n\leqslant m+1$, и не более $2\left\{\left[\frac{m+n+1}{2}\right]+q\right\}$ комплексных нулей при $n\geqslant m+1$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 функция $P(z)g(z)+Q(z)h(z)$ имеет не более $2S(Q,P)+2S(h,g)$ комплексных нулей. Так как $h(z)$ и $g(z)$ образуют вещественную пару, то одна из функций $g(z)\pm ih(z)\in B$, и умножая, в случае нужды, $h(z)$ на -1, можем считать, что $S(h,g)=0$ (см. [3]). Оценим верхнюю границу $S(Q,P)$ для произвольных $P(z)$ и $Q(z)$ при фиксированных m, p, n, q.

Так как $n+2q\geqslant m+2p$, то нуль не может быть асимптотическим значением для $Q(z)/P(z)$ и, по доказанному в [3],

$$S(Q,P)=S_0(Q,P)\geqslant S_\infty(Q,P).$$

Величина

$$S_0(Q,P)=q+\mu,$$

где μ — число вещественных нулей полинома $Q(z)$, в которых

$$Q'P-P'Q \tag{1}$$

отрицательно. Так как полином $Q(z)$ можно умножить на -1, то вопрос сводится к оценке верхней границы μ числа вещественных нулей полинома $Q(z)$, в которых выражение (1) имеет один и тот же знак. Выражение (1) имеет в двух соседних нулях полинома $Q(z)$ один и тот же знак, если между ними расположено нечетное число нулей полинома $P(z)$, и разные знаки, если таких нулей четное число. Рассмотрим два случая:

1. $n\leqslant m+1$.
2. $n\geqslant m+1$.

В первом случае между каждыми двумя вещественными нулями $Q(z)$ можно поместить по одному нулю $P(z)$, и верхняя граница $\mu=n$.

Во втором случае наибольшее значение для μ получится, если между первыми $m+1$ вещественными корнями $Q(z)$ вставить по одному корню полинома $P(z)$. В оставшихся $n-m-1$ вещественных нулях $Q(z)$ выражение (1) попеременно принимает разные знаки, поэтому

$$\mu=m+1+\left[\frac{n-m-1}{2}\right]=\left[\frac{n+m+1}{2}\right].$$

Окончательно, в первом случае

$$S_0(Q,P)=n+q,$$

а во втором

$$S_0(Q,P)=\left[\frac{n+m+1}{2}\right]+q,$$

что полностью доказывает теорему.

Если зафиксированы только степени полиномов $P(z)$ и $Q(z)$, то теорема звучит следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $g(z)$ и $h(z)$ — две целых функции, образующие вещественную пару, а $P(z)$ и $Q(z)$ — два произвольных вещественных полинома степени m и n. Функция $P(z)g(z)+Q(z)h(z)$ имеет не более $2\left[\frac{m+n+1}{2}\right]$ комплексных нулей.*

Имеет смысл дать несколько иную формулировку теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть две целые вещественные функции $u(z)$ и $v(z)$ имеют только конечное число комплексных нулей, конечное число вещественных неперемежающихся корней и любые две точки можно соединить непрерывной кривой, вдоль которой приращение $\arg\frac{v(z)}{u(z)}$ по абсолютной величине остается меньше некоторой константы, не зависящей от выбранных точек. Пусть $2p$ — число комплексных нулей функции $u(z)$, $2q$ — число комплексных нулей функции $v(z)$, m — число вещественных неперемежающихся нулей функции $u(z)$, n — число аналогичных нулей функции $v(z)$. Пусть, для определенности, $n+2q \geqslant m+2p$.*

Число комплексных нулей линейной комбинации $\lambda u(z)+\mu v(z)$ при произвольных вещественных λ и μ не более $2(n+q)$, если $n \leqslant m+1$, и не более $2\left(\left[\frac{m+n+1}{2}\right]+q\right)$, если $n \geqslant m+1$.

Доказательство. Функции $u(z)$ и $v(z)$ допускают представление

$$u(z)=P(z)g(z), \qquad v(z)=Q(z)h(z),$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы, удовлетворяющие всем условиям теоремы 2. Все корни целых функций $g(z)$ и $h(z)$ вещественны и перемежаются. Из ограниченности изменения $\arg\frac{v(z)}{u(z)}$ следует ограниченность изменения $\arg\frac{h(z)}{g(z)}$. Из последнего свойства и вещественности и перемежаемости корней следует, что функции $g(z)$ и $h(z)$ образуют вещественную пару (см. теорему 5 в ([4])), и теорема полностью сводится к теореме 2.

Все границы, указанные в теоремах, являются точными в том смысле, что существуют функции, для которых они достигаются.

В условии теоремы 4 особую роль играет требование ограниченности изменения $\arg\frac{v(z)}{u(z)}$ в том смысле, как оно сформулировано в условии этой теоремы. Если это условие не выполняется, то с точностью до вещественной постоянной однозначно определяется целая вещественная функция $f(z)$ такая, что

$$v(z)=e^{f(z)}v_1(z), \tag{2}$$

и функции $u(z)$ и $v_1(z)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 4. С помощью этого представления можно доказать следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $u(z)$ и $v(z)$ имеют только конечное число комплексных и вещественных неперемежающихся корней, но изменение $\arg\frac{v(z)}{u(z)}$ не ограничено в смысле теоремы 4. Тогда при любых вещественных λ и μ, $\lambda\mu\neq 0$, функция*

$$\lambda u(z)+\mu v(z) \qquad (\lambda\mu\neq 0) \tag{3}$$

имеет бесчисленное множество комплексных нулей.

Если определенная с помощью соотношения (2) функция $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots$ полином, то почти все нули функции (3) лежат внутри углов

$$\theta_k - \delta \leqslant \arg z\theta \leqslant + \delta, \qquad \theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{2n}, \; k = 0, \quad 1, \; \ldots, 2n-1, \tag{4}$$

$$|\arg z| < \delta, \qquad |\pi - \arg z| < \delta \tag{5}$$

при любом $\delta > 0$. При всех достаточно больших N в пересечении кругового кольца

$$\sqrt[n]{\frac{\pi}{|a_0|}\left(-\frac{1}{2} + 2N\right)} \leqslant r \leqslant \sqrt[n]{\frac{\pi}{|a_0|}\left[-\frac{1}{2} + 2(N+1)\right]}$$

с каждым из углов (4) находится ровно один корень

$$z_{N,k} = r_{N,k} e^{i(\theta_k + \alpha_{N,k})} \quad (k = 0, \quad 1, \; \ldots, 2n-1)$$

функции (3), причем

$$|\alpha_{N,k}| = O(1/N).$$

Пусть $\rho = \max[\rho_1, \; \rho_2]$, где ρ_1 и ρ_2 — порядки функций $u(z)$ и $v(z)$. Если $\rho > n$, то все нули функции (3), за исключением последовательности с показателем сходимости n, лежат внутри криволинейной полосы

$$|y| = e^{-(|a_0| - \varepsilon)x^n},$$

где ε — любая положительная величина.

Институт физических проблем
Академии Наук СССР

Поступило
9 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Мейман, ДАН, 62, № 3 (1948). [2] Н. Г. Чеботарев, ДАН, 35, 219 (1942). [3] Н. Мейман, ДАН, 40, 200 (1943). [4] Н. Мейман, ДАН, 40, 54 (1943).