Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Л. ЛЮСТЕРНИК

# НЕКОТОРЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДВУКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Будем пользоваться в настоящей заметке обозначениями работы [1]. Введем также следующие обозначения: если $A=A(x, y)=A[r, \varphi]$ — точка с декартовыми координатами $x$ и $y$ и полярными $r$ и $\varphi$, то

$$(D, A)=D_1x+D_2y=rD\cos(\varphi-\vartheta). \tag{1}$$

Здесь $D=\sqrt{D_1^2+D_2^2}$, $D_1=D\cos\vartheta$, $D_2=D\sin\vartheta$; при операторном истолковании множителей $D_1, D_2$ [1] $D_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $D_2=\frac{\partial}{\partial y}$ $D^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\Delta$ (оператор Лапласа).

Если $F(D_1,D_2)=\sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik}D_1^iD_2^k$, то $F(D_1,D_2)\equiv 0 \pmod{D^n}$ означает: коэффициенты $a_{ik}$ при членах степени $i+k<n$ относительно $D_1$, $D_2$ обращаются в нуль.

Пусть $Q$ — плоская область. Будем строить кубатурные формулы

$$\iint_Q f(x, y)\quad dx\,dy=\sum c_if(A_i), \tag{2}$$

точные для случая, когда $f$ есть полином степени меньше $n$, т. е. для $f=x^iy^k$ при $i+k<n$. В работе [1] показано, что это построение сводится к подбору таких чисел $c_i$ (коэффициентов кубатурной формулы) и точек $A_i$ (узлов ее), что

$$\iint_Q \exp(xD_1+yD_2)\,dx\,dy-\sum c_i\exp(D, A_i)\equiv 0 \pmod{D^n}. \tag{3}$$

Мы вычислим ниже значения операторов $J_Q=\iint_Q \exp(xD_1+yD_2)\,dx\,dy$ для некоторых плоских областей $Q$ — для случаев, когда $Q$ есть круг или правильный $n$-угольник, что позволит составить кубатурные формулы для этих областей.

В дальнейшем будем пользоваться известными тождествами

$$e^{a\cos\alpha}=I_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(a)\cos n\alpha, \tag{4}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos k\left(\varphi-i\frac{2\pi}{n}\right)=\begin{cases}\cos\varphi & \text{при } k\equiv n \pmod 0,\\ 0 & \text{при } k\not\equiv n \pmod 0.\end{cases} \tag{5}$$

Можно доказать нужные нам для дальнейшего тригонометрические тождества:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\cos 2\left(\varphi - i\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\frac{2\pi}{n}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\varphi - i\frac{2\pi}{n}\right)}{\cos 2\left(\varphi - i\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\frac{2\pi}{n}} = 0. \qquad (6)$$

2. Усреднение значений в вершине правильного $n$-угольника. Пусть $\rho A_n^i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, — точки с полярными координатами $\rho$, $i\frac{2\pi}{n}$ — вершины правильного $n$-угольника с центром в начале координат $O$ и радиусом $\rho$ описанного круга; обозначим через $S_{\rho, n}$ оператор усреднения значений по вершинам соответственного $n$-угольника

$$S_{\rho, n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \exp(D, \rho A_n^i). \qquad (7)$$

В силу (1) и (4) для $A = A[\rho, \varphi]$

$$\exp(D, A) = \exp[\rho D\cos(\varphi - \vartheta)] = $$
$$= I_0(\rho D) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(\rho D)\cos k(\varphi - \vartheta). \qquad (8)$$

Из (7), (8) и (5) следует

$$S_{\rho, n} = I_0(\rho D) + 2\sum_{l=1}^{\infty} I_{ln}(\rho D)\cos ln(\varphi - \vartheta) \equiv I_0(\rho D) \pmod{D^n}. \qquad (9)$$

3. Оператор $J_Q$ интегрирования по площади $Q$ круга и правильного многоугольника. Рассмотрим случай: $Q$ есть единичный круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$; тогда (см. (8)):

$$J_Q = \iint_Q \exp(xD_1 + yD_2)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} \exp[\rho D\cos(\varphi - \vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = $$
$$= 2\pi\int_0^1 I_0(\rho D)\,\rho\,d\rho = 2\pi D^{-1} I_1(D)\,^*. \qquad (10)$$

Пусть теперь $Q$ есть правильный $n$-угольник $S_n$ с вершинами $A_n^i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ $(A_n^n = A_n^0)$. Обозначим $D^{(i)} = (D_1, A_{ni}) = D\cos\left(\vartheta - i\frac{2\pi}{n}\right)$.

$$J_{S_n} = \iint_{S_n} \exp(xD_1 + yD_2)\,dx\,dy = \sum_{i=0}^{n-1}\iint_{OA_n^iA_n^{i+1}} \exp(xD_1 + yD_2)\,dx\,dy = $$
$$= \sin\frac{2\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1\int_0^1 \exp[t\rho D^{(i)} + (1-t)\,\rho D^{(i+1)}]\,\rho\,d\rho\,dt = $$
$$= \sin\frac{2\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\exp D^{(i)} - 1}{D^{(i)}}\left(\frac{1}{D^{(i)} - D^{(i+1)}} + \frac{1}{D^{(i)} - D^{(i-1)}}\right) = $$

---

[1] Ср. ([2]).

$$= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^{-2} \sin \frac{2\pi}{n} \; (\exp D^{(i)} - 1)}{\cos 2\left(\vartheta - i\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\frac{2\pi}{n}}.$$

С помощью формул (6) полученное равенство преобразуется к виду

$$J_{S_n} = 4\,D^{-2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n} \cos r\left(i\frac{2\pi}{n} - \vartheta\right) I_r(D)}{\cos 2\left(\vartheta - i\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\frac{2\pi}{n}}.$$

Суммирование по $i$ на основании (5) и (6) приведет это выражение к виду

$$J_{S_n} = 4\,nD^{-2}\left[\sum_{m=1}^{\infty} \sin m\frac{2\pi}{n} I_{2m}(D) + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \sin m\frac{2\pi}{n} \cos ln\vartheta I_{ln+2m}(D)\right]. \tag{11}$$

4. Кубатурные формулы для круга. Пусть $Q$ — единичный круг. Будем строить кубатурные формулы вида

$$\frac{1}{2\pi}\iint_Q f(x, y)\,dx\,dy = C_0 f(0) + \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\rho_j A_n^i), \tag{12}$$

точные для всех полиномов степени $< n = 4k + 2$. Для этого достаточно подобрать числа $C_j$ и $\rho_j$ так, чтобы

$$J_Q - C_0 - \sum_{j=1}^{k} C_j S_{\rho_j, 4k+2} \equiv 0 \pmod{D^{4k+2}},$$

или, в силу (9) и (10):

$$D^{-1} I_1(D) - C_0 - \sum_{j=1}^{h} C_j I_0(\rho_j D) \equiv 0 \pmod{D^{4k+2}};$$

для этого нужно выполнение следующих равенств:

$$C_0 + \sum_{j=1}^{k} C_j = 1; \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{k} C_j \rho_j^{2s} = \frac{1}{s+1} \quad (s = 1, 2, \ldots, 2k). \tag{14}$$

Рассмотрим совокупность полиномов $L_m(x) = \frac{d^{m+1}}{d_x^{m+1}}[x^m(x-1)^{m+1}]$, $m = 1, 2, 3, \ldots$; они образуют на отрезке (0,1) ортогональную систему с весом $x$, именно $\int_0^1 L_m(x) L_n(x)\,x\,dx = 0$ при $m \neq n$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_k$ — нули полинома $L_k(x)$ (эти нули вещественны и лежат в промежутке (0,1)). Если бы мы строили квадратурную формулу гауссовского типа $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{j=1}^{k} d_j f(t_j)$, точную для случая, когда $f$ есть любой полином степени $<2k$ относительно $t$, то числа $d_j$ и $t_j$ удовлетворяли бы системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{k} d_j t_j^{s-1} = \frac{1}{s+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, 2k. \tag{15}$$

В силу теоремы Христофеля числа $t_j$ совпадают с нулями $\alpha_j$ полинома $L_k(x)$. Сравнивая уравнения (14) и (15), получаем:

$$C_j \rho_j^2 = d_j, \qquad \rho_j^2 = t_j = \alpha_j.$$

Радиусы $\rho_j$ в кубатурной формуле (12) суть корни квадратные нулей полинома $L_k(x)$.

Таким образом строятся кубатурные формулы (12) для любого $k$. Для $k = 1, 2, 3$ они имеют вид:

$$\iint\limits_{Q} f(x, y)\, dx\, dy \approx \pi \left[ \frac{1}{4} f(0) + \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{5} f\left( \sqrt{\frac{2}{3}}\, A_6^i \right) \right] \tag{16}$$

(точно для полиномов первых 5 степеней);

$$\iint\limits_{Q} f(x, y)\, dx\, dy \approx \pi \left[ \frac{1}{9} f(0) + \frac{16 - 3\sqrt{6}}{360} \sum_{i=0}^{9} f\left( \sqrt{\frac{6 - \sqrt{6}}{10}}\, A_{10}^i \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{16 + 3\sqrt{6}}{360} f\left( \sqrt{\frac{6 + \sqrt{6}}{10}}\, A_{10}^i \right) \right] \tag{17}$$

(точно для полиномов первых 9 степеней);

$$\iint\limits_{Q} f(x, y)\, dx\, dy \approx \pi \left[ \frac{1}{16} f(0) + 0{,}0235 \sum_{i=0}^{13} f(0{,}401\, A_{14}^i) + \right.$$
$$\left. + 0{,}0277 \sum_{i=0}^{13} f(0{,}768\, A_{14}^i) + 0{,}0158 \sum_{i=0}^{13} f(0{,}955\, A_{14}^i) \right] \tag{18}$$

(точно для полиномов первых 13 степеней, коэффициенты взяты с соответственным приближением).

5. Кубатурные формулы для правильных $n$-угольников. Найденное выражение (14) для $J_{S_n}$ позволяет аналогичным образом строить кубатурные формулы для правильных $n$-угольников.

Пример. Из (14) и (9) следует:

$$J_{S_6} - C_0 - C_1 S_{\rho, 6} \equiv 0 \pmod{D^6}$$

при $C_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{43}{56}$, $C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{125}{336}$, $\rho = \frac{\sqrt{14}}{5}$.

Получаем кубатурную формулу для правильного шестиугольника, точную для полиномов первых 5 степеней:

$$\iint\limits_{S_6} f(x, y)\, dx\, dy \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{43}{56} f(0) + \frac{125}{336} \sum_{i=0}^{5} f\left( \frac{\sqrt{14}}{5} A_6^i \right) \right]. \tag{19}$$

Поступило
7 VIII 1948

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник и В. А. Диткин, ДАН, 61, № 3 (1948). [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945, стр. 290.