Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. А. ДИТКИН

О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРЕХКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 VIII 1948)

В ([1]) был указан общий метод построения приближенных формул для вычисления двойных и тройных интегралов.

Здесь речь идет о формулах вида

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V f\,dv = \sum_{i=1}^{m} M_i f(A_i), \tag{1}$$

где V — объем шара радиуса единицы и $f(A_i)$ — значение функции в точке A_i.

Равенство (1) является приближенным. Мы будем требовать, чтобы (1) была точна для всех многочленов степени не выше s. Число s характеризует в известном смысле точность формулы (1).

Будем вместо $f(A)$ писать $f(\rho, \theta, \varphi)$, где ρ, θ, φ — сферические координаты точки A.

Справедлива формула:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V f\,dv = \sum_{k=1}^{p} c_k \sum_{\nu=1}^{2p} \frac{b_\nu}{4p} \sum_{r=0}^{4p-1} f\left(\rho_k, \theta_\nu, \frac{\pi r}{2p}\right), \tag{2}$$

точная для всех многочленов степени $4p-1$.

Постоянные c_k *и* ρ_k *удовлетворяют квадратурной формуле*

$$\int_{-1}^{+1} f(\rho)\rho^2 d\rho = \sum_{k=1}^{p} c_k f(\rho_k) + \sum_{k=1}^{p} c_k f(-\rho_k).$$

Следовательно, ρ_k *равны положительным корням многочлена* $S_{2p}(\rho)$ *степени* $2p$, *где* $S_k(\rho)$ — *последовательность многочленов, ортогональных на интервале* $(-1, 1)$, *с весом* ρ^2.

Точно так же числа b_ν *и* $x_\nu = \cos\theta_\nu$ *удовлетворяют квадратурной формуле*

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{p} b_\nu f(x_\nu) + \sum_{\nu=1}^{p} b_\nu f(-x_\nu),$$

и, следовательно, $x_\nu = \cos\theta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2p)$ *корни полинома Лежандра* $P_{2p}(x)$.

В формуле (2) точки A_i лежат на поверхностях p различных сфер. Однако часто оказывается выгодным брать также значение функции и в центре сферы. Формула, соответствующая этому случаю, имеет вид, аналогичный (2), и является точной для всех многочленов степени $4p+1$; числа ρ_k равны неотрицательным корням многочлена $S_{2p+1}(\rho)$ и $x_\nu=\cos\theta_\nu$ — корни полинома $P_{2p+1}(x)$.

Не следует думать, что при $8p^3$ точках (2) является наиболее точной. Возможен случай, когда другой выбор точек A_i при сохранении их числа повышает точность формулы. Преимущество (2) состоит в сравнительной простоте нахождения координат точек A_i и коэффициентов M_i.

Естественно ожидать, что наиболее точные формулы получатся при таком расположении точек A_i, когда все они входят равноправно, т. е. точки следует выбирать в вершинах правильных многогранников.

Тетраэдр дает небольшую точность. Отвечающая ему формула будет точна только для многочленов не выше второй степени.

Если обозначить через $A_1, A_2, \ldots, A_6$ вершины октаэдра и через $f_{\rho=\sqrt{3/5}}(A_i)$ — значение функции в вершине A_i октаэдра, вписанного в шар радиуса $\rho=\sqrt{3/5}$, то

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V f\,dv=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{6} f_{\rho=\sqrt{3/5}}(A_i). \tag{3}$$

Эта формула точна для всех многочленов степени не выше третьей. Она выгоднее, чем соответствующая формула для куба, так как при той же точности число точек в (3) меньше.

Если брать значение $f(A_i)$ в вершинах икосаэдра и в центре (начале координат), то будем иметь формулу

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V f\,dv=$$

$$\frac{4}{75}f(0,0,0)+\frac{7}{300}\sum_{i=1}^{12} f_{\rho=\sqrt{5/7}}(A_i), \tag{4}$$

где $f_{\rho=\sqrt{5/7}}(A_i)$ — значение функции в вершине A_i икосаэдра, вписанного в шар радиуса $\rho=\sqrt{5/7}$. Формула (4) является точной для всех многочленов степени не выше 5.

Подобно тому, как куб не дает большей точности, чем октаэдр, так и додекаэдр не дает лучшей точности, чем икосаэдр. Но комбинация додекаэдра с икосаэдром позволяет увеличить точность.

Пусть A_i — вершины икосаэдра и B_i — вершины додекаэдра, причем додекаэдр расположен так, что его вершины лежат на перпендикулярах, опущенных из центра икосаэдра на его грани. Тогда справедлива формула:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V f\,dv=$$

$$=\frac{16}{525}f(0,0,0)+\frac{27}{1400}\sum_{i=1}^{12} f_{\rho=\sqrt{5/9}}(A_i)+\frac{1}{280}\sum_{i=1}^{20} f_{\rho=1}(B_i), \tag{5}$$

точная для всех многочленов степени не выше 7.

В приложениях часто встречаются интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)\, e^{-x^2-y^2-z^2}\, dx\, dy\, dz.$$

Для них можно было бы установить общие формулы подобно тому, как это было сделано для сферы.

В заключение отметим, что оценку погрешности при вычислении по формуле (1) можно получить известными методами, пользуясь формулой Тейлора.

Поступило
7 VIII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник и В. А. Диткин, ДАН, **61**, № 3 (1948).