Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, М. В. Задорожнюк

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Гомель 2024

УДК 512.743+514.12(075.8)
ББК 22.143+22.151.5я73
А18

Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(*протокол № 10 от 14.06.2023 г.*)

Рецензент: доц. каф. информационно-вычислительных систем БТЭУ ПК
канд. физ.-мат. наук, доц. *Л. А. Воробей*

Авакян, Е. З.

А18 Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб.-метод. пособие для студентов техн. специальностей заоч. формы обучения / Е. З. Авакян, С. Л. Авакян, М. В. Задорожнюк. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2024. – 125 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Содержит краткие теоретические сведения по основным разделам дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», достаточное количество примеров, тестовые задания, задания для самостоятельного решения с ответами по каждому из разделов курса, а также варианты индивидуальных заданий по дисциплине.

Для студентов технических специальностей заочной формы обучения.

УДК 512.743+514.12(075.8)
ББК 22.143+22.151.5я73

РАЗДЕЛ 1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы. Действия над матрицами

Определение 1.1. *Матрицей* $A_{m\times n}$ размерности $m\times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} таблицы имеет два индекса, где i – номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца.

Если $n=m$, то матрица называется *квадратной* порядка n.

Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют *главную диагональ* квадратной матрицы A, вторая диагональ называется *побочной*. Матрица называется *диагональной*, если все элементы, стоящие вне главной диагонали, есть нули.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой E.

Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы – нули.

Треугольной называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица $A^T_{n\times m}$ называется *транспонированной* к матрице $A_{m\times n}$, если она получена из $A_{m\times n}$ заменой всех строк столбцами.

Для матриц определены следующие *операции*:

1. Сложение матриц.

Пусть матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ имеют одинаковые размерности,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$ называется *суммой* матриц A и B.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+4 & 2+5 \\ 3-2 & -1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Свойства сложения матриц</u>:

1. Сложение матриц коммутативно, т. е. $A+B=B+A$.
2. Сложение матриц ассоциативно, т. е.

$$(A+B)+C=B+(A+C).$$

3. Сложение матриц обратимо, т. е. для любых матриц A и B одинаковой размерности найдется матрица X, такая что $A+X=B$.

2. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *на число* α называется матрица $\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$.

Матрица $(-1)A=-A$ называется *противоположной* к матрице A.

<u>Свойства умножения матриц на число</u>:

1. Коммутативность, т. е. $\alpha A=A\alpha$.
2. Дистрибутивность относительно суммы чисел, т. е.

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A.$$

3. Дистрибутивность относительно суммы матриц, т. е.

$$(A+B)\alpha=\alpha A+\beta B.$$

4. Ассоциативность, т. е. $(\alpha)\beta A=\alpha(\beta A)$.

3. Умножение матриц

Пусть число столбцов матрицы $A_{m\times k}$ равно числу строк матрицы $B_{k\times n}$. *Произведением* $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, такая, что каждый её элемент определяется формулой:

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}. \qquad (1.1)$$

Свойства умножения матриц:

1. Умножение матриц некоммутативно;

Если для некоторых матриц A и B выполняется равенство $AB=BA$, то такие матрицы называют *перестановочными*. Единичная матрица перестановочна с любой.

2. Умножение матриц ассоциативно, т. е. $(AB)C=B(AC)$.

3. Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения, т. е. $(A+B)C=AC+BC$.

4. Для умножения матриц справедливо свойство:

$$\alpha(AB)=A(\alpha B).$$

5. Произведение матриц может быть нулевой матрицей, хотя оба сомножителя ненулевые.

6. Для транспонирования произведения матриц справедлива формула: $(AB)^T=B^TA^T$.

Пример 1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & -3\\ -2 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Найти AB и BA.

Решение

1. Проверим, согласованы ли матрицы A и B (определена ли операция умножения для данных матриц). Матрица A имеет размер 2×2, матрица B – 2×3. Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то A и B согласованы и произведение AB существует.

2. Выполним умножение согласно формуле (1.1).

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & -3\\ -2 & 5 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot(-2) & 1\cdot 4+2\cdot 5 & 1\cdot(-3)+2\cdot 6\\ 0\cdot 3+(-1)(-2) & 0\cdot 4+(-1)\cdot 5 & 0\cdot(-3)+(-1)\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 14 & 9\\ 2 & -5 & -6\end{pmatrix}.$$

Что же касается произведения BA, то оно не определено, так как матрицы $B_{2\times3}$ и $A_{2\times2}$ несогласованы.

Замечание. *Возведение матрицы в степень* определено только для квадратной матрицы. Целой положительной степенью A^k квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A. *Нулевой степенью* квадратной матрицы A $(A \neq 0)$ называется единичная матрица того же порядка, что и A, т. е. $A^0 = E$.

Пример 1.2. Найти значение многочлена $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Решение

1. Подставим в многочлен $x = A$ Заметим, что **число** 4 при этом необходимо преобразовать в **матрицу** $4E$, где E – единичная матрица второго порядка.

$$f(A) = A^2 - 3A + 4E.$$

2. Выполним возведение в степень, умножение матрицы на число и сложение (вычитание) матриц:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1.2. Определители

Рассмотрим квадратную матрицу A n-го порядка. Каждой квадратной матрице можно сопоставить определенное число, называемое *определителем*. Это число равно сумме всех возможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, умноженных на $(-1)^l$, где l – число перестановок второго индекса в случае, если первые упорядочить. Обозначается определитель одним из следующих символов: $\det A$, $|A|$, Δ_A.

Определитель первого порядка: $|\,a_{11}\,| = a_{11}$.

Определитель второго порядка:

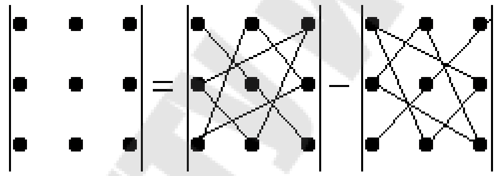
$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}(-1)^0 + a_{12}a_{21}(-1)^1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}(-1)^1 + a_{12}a_{21}a_{33}(-1)^1 + a_{12}a_{23}a_{31}(-1)^2 + a_{13}a_{21}a_{32}(-1)^2 + a_{13}a_{22}a_{31}(-1)^3 =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}\right).$$

При вычислении определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом Саррюса (правилом треугольника):



Свойства определителя:

1. Определитель матрицы не меняется при ее транспонировании.

2. При перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Если все элементы какого-либо столбца умножить на одно и то же число m, то значение определителя изменится в m раз.

Следствие 1. Если все элементы строки (столбца) пропорциональны какому-либо числу, то его можно выносить за знак определителя.

Следствие 2. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

5. Определитель, у которого две строки (столбца) пропорциональны, равен нулю.

6. Определитель остается неизменным, если к любой его строке добавить другую строку, умноженную на произвольное число;

7. Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) есть сумма двух слагаемых, тогда определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Дальнейшие свойства определителя связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Определение 1.2. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный из исходного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Определение 1.3. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т. е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.2}$$

8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на соответствующие алгебраические дополнения (***правило Лапласа***).

9. Сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Свойство 8 содержит в себе правило вычисления определителей высоких порядков.

Пример 1.3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Решение

Для вычисления этого определителя воспользуемся сначала свойством 6: прибавим к третьей строке первую, а к четвертой строке – первую, умноженную на (-3).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & 14 & -4 \end{vmatrix}.$$

Теперь воспользуемся правилом Лапласа. Разложим определитель по элементам, первого столбца (целесообразно выбирать столбец или строку с наибольшим количеством нулей).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & -14 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 8 & -14 & -4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 8 & -14 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \\ 4 & -7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-70 + 60 - 84 - 56 + 175 + 36) = 2 \cdot 61 = 122.$$

Ответ: 122.

1.3. Обратная матрица

Определение 1.4. Матрицей, *обратной* квадратной матрице A, называется квадратная матрица A^{-1}, удовлетворяющая равенствам

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

Теорема 1.1. Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет единственную обратную матрицу A^{-1}, определяемую по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A (алгебраическое дополнение A_{ij} записывается в строку с номером j и в столбец с номером i, т. е. в так называемом транспонированном порядке).

Алгоритм вычисления обратной матрицы 1. Вычислить определитель. В случае, если определитель равен нулю, то матрица является вырожденной и обратной матрицы не имеет. 2. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы по формуле (1.2). 3. Записать обратную матрицу, используя формулу (1.3). ***Замечание***. Для проверки рекомендуется умножить полученную матрицу на исходную и убедиться, что это произведение равно единичной матрице.

Пример 1.4. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ найти ей обратную.

Решение

1. Вычислим определитель матицы A, пользуясь правилом треугольника.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}=30+36+0-(0+30+30)=6\neq 0,$$

следовательно, матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле (1.2).

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5-6) = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -30, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 15, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Согласно формуле (1.3) получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -30 & 12 \\ 1 & 15 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1/6 & 5/2 & -1 \\ -1/6 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1/6 & 5/2 & -1 \\ -1/6 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1/6 & 5/2 & -1 \\ -1/6 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \le \min(m, n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определители. Все такие определители называются *минорами* k *-го порядка*.

Определение 1.5. *Рангом* матрицы называется порядок старшего отличного от нуля минора.

Обозначается r, $r(A)$, $\operatorname{rang} A$.

Очевидно, что $0 \le r(A) \le \min(m, n)$.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Пример 1.5. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение

Так как матрица содержит три строки, то $r(A) \le 3$.

Вычислим миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Среди миноров третьего порядка не оказалось ни одного ненулевого, значит, $r(A) < 3$.

Вычислим миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \ne 0.$$

Так как среди миноров второго порядка нашелся по крайней мере один, отличный от нуля, то ранг матрицы A равен 2.

Ответ: $r(A) = 2$.

Свойства ранга матрицы

1. Ранг матрицы не меняется при транспонировании, т. е.

$$r(A) = r(A^T).$$

2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится;

3. Ранг не меняется при элементарных преобразованиях матрицы.

К элементарным преобразованиям матриц относятся:

– перестановка строк или столбцов матрицы;

– умножение строки или столбца на отличное от нуля число;

– прибавление ко всем элементам строки (столбца), соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Из свойства 3 следует, что ранг матрицы $A_{m\times n}$ $(m \le n)$ равен числу ненулевых строк в трапециевидном виде матрицы. (если $m > n$, слово «строк» следует заменить словом «столбцов»).

Пример 1.6. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, пользуясь свойствами ранга.

Решение

Умножим первую строку на (-2) и (-3) и прибавим, соответственно, ко второй и третьей строкам:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как полученная матрица содержит две ненулевых строки, то $r(A) = 2$.

Ответ: $r(A) = 2$.

Тестовые задания

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{pmatrix}$. Сумма элементов a_{21} и a_{32} равна:

   а) 13; б) 11; в) 8; г) 16; д) 18

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Сумма $A + B$ равна:

   а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; в) не существует;

   г) (8); д) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Произведение $A \cdot B$ равно:

   а) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; в) не существует;

   г) (8); д) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Транспонированной к матрице $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ является матрица

   а) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$;

   г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ равен

   а) –9; б) 15; в) 12; г) 9; д) 0.

6. Если в определителе $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ поменять местами первую и вторую строку, то

а) определитель не изменится;
б) определитель поменяет знак на противоположный;
в) определитель станет равен 0;
г) определитель увеличится;
д) определитель уменьшится.

7. Если в определителе $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ поменять местами первый и третий столбец, то

а) определитель не изменится;
б) определитель поменяет знак на противоположный;
в) определитель станет равен 0;
г) определитель увеличится;
д) определитель уменьшится.

8. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, то минор $M_{21} =$

а) 2; б) 21; в) -21; г) 11; д) -11.

9. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, то алгебраическое дополнение $A_{21} =$

а) 2; б) 21; в) -21; г) 11; д) -11.

10. Если A^{-1} является обратной к матрице A, то

а) $A^{-1}A = 0$; б) $A^{-1}A = E$; в) $A^{-1} = \dfrac{E}{A}$;
г) $AE = A^{-1}$; д) $A^{-1} + A = 0$.

Ответы: 1) а; 2) в; 3) г; 4) д; 5) г; 6) б; 7) а; 8) б; 9) в; 10) б.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

   Найти $A+B$, $3A-2B$, A^T.

2. Даны матрицы $A_{1\times3}$, $B_{5\times1}$ и $C_{3\times5}$. Существует ли произведение:

   а) AB; б) AC; в) BA; г) CA; д) ABC; е) CBA?

3. Найти AB и BA, если:

   а) $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

4. Найти значение многочлена $f(A)$, если $f(x)=-x^2+4x-6$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$.

5. Вычислить определители:

   а) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -5\end{vmatrix}$; б) $A=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}121 & 283\\ 221 & 183\end{vmatrix}$;

   г) $\begin{vmatrix}1 & 4 & -2 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 5\\ -2 & -8 & 4 & -6\\ 1 & 2 & 1 & 7\end{vmatrix}$.

6. Найти матрицу, обратную к данной, если она существует. Сделать проверку: а) $\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 15 & -5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 0\\ 5 & 1 & 7\end{pmatrix}$.

7. Найти ранг матрицы:

   а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -6\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Ответы: **1.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & -10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. а) нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) да. **3**. а) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & 8 \\ 6 & -9 & 3 & 12 \\ 8 & -12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, (15). **4.** $\begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 14 & -42 \end{pmatrix}$. **5.** а) -13; б) 7; в) -40400;

г) 0. **6.** а) $\begin{pmatrix} 3/8 & -1/4 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$; б) нет; в) $\begin{pmatrix} 14/23 & 1/23 & -11/23 \\ -7/46 & 11/46 & 1/23 \\ -19/46 & -3/46 & 6/23 \end{pmatrix}$.

7. а) 2; б) 2; в) 1.

РАЗДЕЛ 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия и определения

Определение 2.1. Системой m линейных уравнений с n неизвестными называют систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Решением системы (2.1) называется n значений неизвестных $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, …, $x_n = C_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Систему (2.1) можно представить в матричном виде:

$$AX = B \tag{2.2}$$

где A – *матрица коэффициентов* (или *матрица системы*), X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

Матрица коэффициентов системы, дополненная столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы и обозначается $\widetilde{A}$ или $\overline{A}$:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

2.2. Решение невырожденных линейных систем

Рассмотрим сначала решение систем n линейных уравнений с n неизвестными, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.4)$$

В этом случае матрица системы A является квадратной. Предположим, что она невырожденна (ее определитель отличен от нуля). Перепишем систему (2.4) в матричном виде и домножим левую и правую часть на обратную матрицу A^{-1} слева:

$$AX = B;$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

$$\boxed{X = A^{-1}B.} \qquad (2.5)$$

Отыскание решений системы по формуле (2.5) называется ***матричным способом*** решения системы (или ***методом обратной матрицы***).

Алгоритм решения системы матричным способом:

1. Записать матрицу системы A.
2. Найти определитель матрицы системы. Если $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}.
3. Найти обратную матрицу по формуле (1.3).
4. Найти решение системы по формуле (2.5):
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$
5. Сделать проверку, подставив найденное решение в исходную систему.

Пример 2.1. Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение

1. Запишем матрицу системы, столбец неизвестных и столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим определитель матрицы системы по правилу треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 6 - 2 - (1 - 18 + 6) = 24.$$

Так как определитель отличен от нуля, то существует обратная матрица A^{-1}, которую найдем по формуле (1.3).

3. Вычислим алгебраические дополнения и запишем обратную матрицу A^{-1} согласно формуле (1.3).

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & -3\end{vmatrix}=9,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{vmatrix}=0,\ A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-8,\ A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-8,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-8$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=5,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=8,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}9 & -8 & 5\\ 0 & -8 & 8\\ 3 & -8 & -1\end{pmatrix}.$$

4. Пользуясь формулой (2.5), получим решение системы:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}9 & -8 & 5\\ 0 & -8 & 8\\ 3 & -8 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 4\\ 10\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}9\cdot 6-8\cdot 4+5\cdot 10\\ 0\cdot 6-8\cdot 4+8\cdot 10\\ 3\cdot 6-8\cdot 4-1\cdot 10\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}72\\ 48\\ -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

5. Выполним проверку:

$$\begin{cases}3\cdot 3-2\cdot 2-(-1)=6,\\ 3-2-3\cdot(-1)=4,\\ 3+2\cdot 2-3\cdot(-1)=10.\end{cases}$$

Так как все уравнения системы при подстановке корней обращаются в верные числовые равенства, то система решена верно.

Ответ: $x_1=3, x_2=2, x_3=-1.$

Формулы Крамера

Теорема Крамера. Если определитель матрицы системы не равен нулю, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по ***формулам Крамера***:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},} \qquad (2.6)$$

где $\Delta = |A|$ – определитель матрицы системы A, Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов (доказательство этого факта можно найти в конце раздела 2).

Алгоритм решения системы методом Крамера

1. Записать матрицу системы A.
2. Найти определитель матрицы системы. Если $|A| \neq 0$, то система имеет единственное решение.
3. Найти Δ_i:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

4. Найти решение системы по формулам (2.6):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

5. Сделать проверку, подставив найденное решение в исходную систему.

Пример 2.2. Решить систему уравнений из примера 2.1 по формулам Крамера.

Решение

1. Запишем матрицу системы, столбец свободных членов и столбец неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. Найдем определитель матрицы системы: $\Delta = 24 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.

3. Вычислим $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, заменяя, соответственно, первый, второй и третий столбец, столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 10 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 72; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = 48; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -24\,.$$

4. По формулам (2.6) найдем решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{72}{24} = 3, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{48}{24} = 2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{24} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -1.$

2.2. Метод Гаусса

Одним из наиболее эффективных и универсальных методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса.

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \; \ldots \; \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Метод основан на последовательном исключении неизвестных и состоит из двух этапов. На первом этапе (*прямой ход)* посредством эквивалентных преобразований система приводится к ступенчатому (в частном случае, к треугольному) виду. К *эквивалентным преобразованиям* системы относятся:

– умножение любого уравнения системы на произвольное отличное от нуля число;

– замена местами строк системы;

– прибавление к какому-либо уравнению системы любого другого уравнения системы, умноженного на некоторое число.

В результате преобразований получается эквивалентная система, которая в общем случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{*}x_2 + \ldots + a_{2k}^{*}x_k + \ldots + a_{2n}^{*}x_n = b_2^{*}, \\ \qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}^{*}x_k + \ldots + a_{kn}^{*}x_n = b_k^{*}, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$ для всех $i = 1,2,\ \ldots,\ k$.

Удобно проводить эквивалентные преобразования с расширенной матрицей системы $\widetilde{A}$.

В таблице приведено соотвествие между эквивалентными преобразованиями системы и преобразовниями расширенной матрицы:

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ	*РАСШИРЕННАЯ МАТРИЦА*
Замена местами строк системы	Замена местами строк матрицы
Умножение любого уравнения системы на произвольное отличное от нуля число	Умножение любой строки матрицы на произвольное отличное от нуля число
Прибавление к какому-либо уравнению системы любого другого уравнения системы, умноженного на некоторое число.	Прибавление к какой-либо строке матрицы системы любой другой строки, умноженной на некоторое число.

Обратный ход заключается в решении полученной системы (2.7), начиная с последнего уравнения.

Алгоритм решения системы методом Гаусса:

1. Выписать расширенную матрицу

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

2. Преобразовать матрицу $\widetilde{A}$ к трапециевидной (треугольной) форме:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1k}^* & \cdots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2k}^* & \cdots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^* & \cdots & a_{kn}^* & b_k^* \end{array}\right)$$

3. Записать систему, соответствующую полученной матрице $\widetilde{A}^*$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^*x_2 + \ldots + a_{2k}^*x_k + \ldots + a_{2n}^*x_n = b_2^*, \\ \qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad a_{kk}^*x_k + \ldots + a_{kn}^*x_n = b_k^*, \end{cases}$$

4. Решить полученную систему, начиная с последнего уравнения.

При этом могут возникнуть три случая:

1) последнее уравнение системы имеет вид $a_{nn}^*x_n = b_n^*$ $(a_{nn}^* \neq 0)$. В этом случае система имеет *единственное решение*:

$$x_n = \frac{b_n^*}{a_{nn}^*},$$

остальные значения $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ находим, двигаясь вверх по системе (2.7).

2) последнее уравнение системы содержит две или более неизвестных: $a_{kk}^{*}x_k + \cdots + a_{kn}^{*}x_n = b_k^{*}$. Тогда система имеет *бесконечно много решений*. Полагая $x_{k+1} = C_1$, $x_{k+2} = C_2, \ldots,$ $x_n = C_{n-k}$ (здесь C_i – произвольные постоянные), выражаем из последнего уравнения x_k через $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$. Затем находим $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_1$, двигаясь вверх по системе (2.7). Придавая постоянным C_i различные значения, получим бесконечное множество решений;

3) последнее уравнение системы (2.7) имеет вид

$$0 \cdot x_n = b_n^{*} \; (b_n^{*} \neq 0).$$

В этом случае *система несовместна*.

Пример 2.4. Решить систему уравнений из примера 2.1 методом Гаусса.

Решение

Прямой ход

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к к треугольному виду с помощью эквивалентных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 10 \end{array}\right)_{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 6 \end{array}\right)_{\substack{\mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{III}}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -8 & 8 & -24 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim_{\substack{\mathrm{II}\cdot(-1/3) \\ \mathrm{III}\cdot 1/8}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)_{\mathrm{II}+\mathrm{III}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Обратный ход

Запишем систему по приведенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10, \\ \qquad x_2 \qquad\;\; = 2, \\ \qquad\qquad\; x_3 = -1, \end{cases}$$

решая которую, получим

$$x_3 = -1,$$

$$x_2 = 2,$$

$$x_1 = 10 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 3.$$

Ответ: $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$.

2.4. Исследование на совместность произвольных систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.8}$$

Теорема 2.1 (Кронекера–Капелли). Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы $\widetilde{A}$. Если при этом ранг равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение, если ранг меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Пример 2.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение

Преобразуем расширенную матрицу системы.

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&3&-5&1\\1&-1&-5&0&2\\3&-2&-2&-5&3\\7&-5&-9&-10&8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&5&0&2\\2&-1&3&-5&1\\3&-2&-2&-5&3\\7&-5&-9&-10&8\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&5&0&2\\0&1&13&-5&-3\\0&1&13&-5&-3\\0&2&26&-10&-6\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&5&0&2\\0&1&13&-5&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Здесь мы сначала поменяли местами первую и вторую строки, затем умножили первую строку последовательно на $(-2), (-3)$ и (-7) и прибавили, соответственно, ко второй, третьей и четвертой строкам. Учитывая, что в получившейся матрице вторая третья и четвертая строки пропорциональны, получили матрицу с двумя нулевыми строками.

Так как $r(A)=r(\widetilde{A})=2<4$, то система совместна и имеет бесконечно много решений.

Запишем систему, соответствующую преобразованной матрице:

$$\begin{cases}x_1-x_2-5x_3 \qquad\qquad =2,\\ \qquad x_2+13x_3-5x_4=-3.\end{cases}$$

В последнем уравнении положим $x_4=C_1, x_3=C_2$. Тогда

$$x_2=-3-13C_2+5C_1,$$

$$x_1=2+5C_2+\left(-3-13C_2+5C_1\right)=-1-8C_2+5C_1,$$

где C_1, C_2 – произвольные действительные числа.

Полагая C_1, C_2 равными различным числам, получим бесконечное множество решений системы.

Ответ: $\left(-1-8C_2+5C_1, -3-13C_2+5C_1, C_2, C_1\right)$, где C_1, C_2 – произвольные действительные числа.

Пример 2.6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение

Преобразуем расширенную матрицу системы.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Так как $r(A) = 2 \neq 3 = r(\widetilde{A})$, то система совместна.

Ответ: система несовместна.

2.5. Системы линейных однородных уравнений

Определение 2.2. *Однородной* системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система совместна всегда, т.к. $r(A) = r(\widetilde{A})$. Она имеет по крайней мере нулевое (*тривиальное*) решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Теорема 2.2. Система однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа неизвестных.

Дополнительные материалы к разделу 2

Докажем теорему Крамера. Запишем формулу (2.5) с учетом равенства (1.3):

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{1n}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+A_{21}b_2+\cdots+A_{n1}b_n\\A_{12}b_1+A_{22}b_2+\cdots+A_{n2}b_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\cdots+A_{nn}b_n\end{pmatrix}.$$

Обозначим $A_{11}b_1+A_{21}b_2+\cdots+A_{n1}b_n=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_n&a_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}=\Delta_1$,

$$A_{12}b_1+A_{22}b_2+\cdots+A_{n2}b_n=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&b_2&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&b_n&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\Delta_2,\ldots,$$

$$A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\cdots+A_{nn}b_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&b_n\end{vmatrix}=\Delta_n.$$

Тогда полученное выше равенство перепишется в виде:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\Delta_1\\\Delta_2\\\vdots\\\Delta_n\end{pmatrix},$$

откуда получаем ***формулы Крамера***:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

где $\Delta=|A|$ – определитель матрицы системы A, Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Тестовые задания

1. Система линейных уравнений называется совместной, если
   а) она имеет единственное решение;
   б) она имеет хотя бы одно решение;
   в) она не имеет решений;
   г) она имеет ненулевое решение;
   д) она имеет бесконечно много решений.
2. Запись системы линейных уравнений в матричном виде имеет вид:

   а) $A^{-1}X = B$; б) $A + X = B$; в) $AX = B$;

   г) $X = AB$; д) $XA = B$.
3. Невырожденная система линейных уравнений может быть решена методом обратной матрицы по формуле:

   а) $X = AB$; б) $X = \dfrac{A}{B}$; в) $X = BA^{-1}$;

   г) $X = \dfrac{B}{A}$; д) $X = A^{-1}B$.
4. Дана система $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -1. \end{cases}$ Согласно методу Крамера переменная x_1 может быть найдена по формуле:

   а) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}$; б) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$;

   в) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}$; г) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}$;

   д) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}$.

5. Для решения системы линейных уравнений матодом Гаусса необходимо:
   а) вычислить определитель марицы системы;
   б) вычислить определитель расширенной матрицы;
   в) найти обратную матрицу;
   г) транспонировать матрицу системы;
   д) привести систему к трапециевидной форме с помощью эквивалентных преобразований.
6. Если ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\widetilde{A}$ равны друг другу и равны числу неизвестных, то система:
   а) несовместна;
   б) имеет единственное решение;
   в) имеет два решения;
   г) имеет три решения;
   д) имеет бесконечно много решений.
7. Если ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\widetilde{A}$ равны друг другу и меньше числа неизвестных, то система:
   а) несовместна;
   б) имеет единственное решение;
   в) имеет два решения;
   г) имеет три решения;
   д) имеет бесконечно много решений.
8. Если ранг матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы, то система:
   а) совместна;
   б) несовместна;
   в) имеет единственное решение;
   г) имеет три решения;
   д) имеет два решения.
9. Однородная система линейных уравнений, определитель матрицы которой равен нулю:
   а) несовместна;
   б) имеет единственное решение - нулевое;
   в) имеет единственное решение - ненулевое;
   г) имеет два решения;
   д) имеет бесконечно много решений.

10. Однородная система линейных уравнений, определитель матрицы которой отличен от нуля:
а) несовместна;
б) имеет единственное решение – нулевое;
в) имеет единственное решение – ненулевое;
г) имеет два решения;
д) имеет бесконечно много решений.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера и методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

2. Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

Ответы к разделу 2. 1) б; 2) в; 3) д; 4) а;5) д; 6) б; 7) д; 8) б; 9) д; 10) б.

Задания для самостоятельного решения. **1** а) $(2;3)$; б) $(1;6;5)$; в) $\left(-\frac{4}{3};6\frac{5}{9};-9\frac{4}{9}\right)$; г) $(2;-1;-2)$. **2.** а) $\left(C;\frac{2-7C}{11};4+C\right)$, $C \in R$; б) не совместна; в) $\left(a;b;\frac{3+25b-5a}{9};\frac{10b-2a}{3}\right)$, $a,b \in R$.

РАЗДЕЛ 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Величины, которые полностью определяются своими числовыми значениями, например, длина, площадь, масса, работа, называются *скалярными*. Другие величины, например, сила, скорость, ускорение, определяются не только числовым значением, но и направлением. Такие величины называют *векторными*.

3.1. Основные понятия и определения

Определение 3.1. *Вектором* называется направленный отрезок прямой. Если начало вектора находится в точке A, а конец – в точке B, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или просто $\overline{a}$.

Определение 3.2. *Длиной*, или *модулем*, вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Обозначается $|\vec{a}|$, $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым*. Считается, что нулевой вектор направления не имеет. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется *ортом* вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^0$.

Определение 3.3. Векторы, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Нулевой вектор коллинеарен каждому вектору.

Определение 3.4. Векторы, расположенные в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Определение 3.5. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения 3.5. следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а его начало помещать в любую точку пространства.

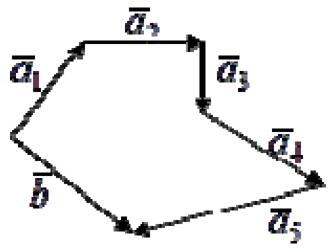
3.2. Линейные операции над векторами

1. Умножение вектора на число

Определение 3.6. *Произведением* вектора $\overline{a}$ на число m называется вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$ и имеющий длину $m|\overline{a}|$. Вектор $\overline{b}$ сонаправлен вектору $\overline{a}$, если $m > 0$ и противоположно направлен, если $m < 0$.

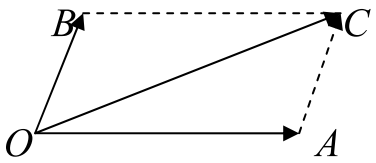
2. Сложение векторов

Определение 3.6. *Суммой* векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется вектор $\bar{b}$, замыкающий ломаную линию, составленную из исходных векторов таким образом, что начало каждого последующего из слагаемых совпадает с концом предыдущего. Результирующий вектор $\bar{b}$ направлен из начала первого вектора к концу последнего. Это правило сложения векторов называется *правилом многоугольника*.



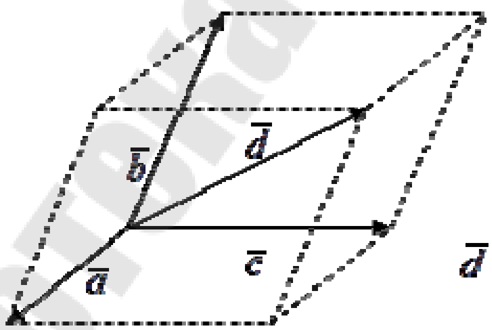
$$\bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n$$

***Предложение* 3.1.** (*правило параллелограмма*). Сумма векторов, приведенных к общему началу, есть вектор – диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах.



Действительно, т.к. в параллелограмме противолежащие стороны параллельны и равны, то $\overline{OB} = \overline{AC}$. Следовательно, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$.

***Предложение* 3.2.** (*правило параллелепипеда*). Сумма трех некомпланарных векторов, приведенных к общему началу, есть вектор – диагональ параллелепипеда, построенного на этих векторах.



$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

<u>Свойства сложения векторов</u>

1. Сложение векторов коммутативно, т. е.

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a};$$

2. Сложение векторов ассоциативно, т. е.

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right).$$

3. Сложение векторов дистрибутивно относительно умножения на число, т.е.

$$m\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\equiv \overline{m}\overline{a}+m\overline{b}\,.$$

4. Для любых чисел m и n и вектора $\overline{a}$ справедливо равенство:

$$(m+n)\overline{a}=m\overline{a}+n\overline{a}\,.$$

3. Вычитание векторов.

Определение 3.7. Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$, такой что $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$.

***Предложение* 3.3**. Разность двух векторов, приведенных к одному началу, есть вектор, начинающийся в конце вычитаемого и заканчивающийся в конце уменьшаемого.

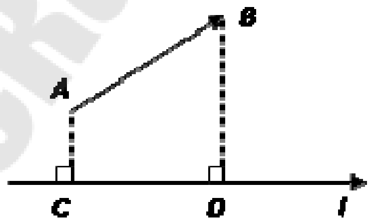
Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, она из диагоналей является суммой, а вторая – разностью указанных векторов.

3.3. Проекция вектора на ось

Определение 3.8. *Осью* называется всякая прямая, на которой указано направление.

Определение 3.9. *Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось $\overline{l}$* называется длина отрезка CD этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, опущенных из начала и конца вектора $\overline{AB}$, взятая со знаком «+», если направление отрезка CD совпадает с направлением оси, и со знаком «–», если эти направления противоположны.

Обозначается $\text{пр}_{\overline{l}}\,\overline{AB}$.



Свойства проекции

1. Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью, т. е.

$$\text{пр}_{\overline{l}}\,\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cos\alpha\,.$$

Из свойства 1 следует, что $\text{пр}_{\bar{l}}\bar{a} > 0$, если угол α – острый, $\text{пр}_{\bar{l}}\bar{a} < 0$, если угол тупой, и $\text{пр}_{\bar{l}}\bar{a} = 0$, если $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

2. Проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых на эту ось, т. е.

$$\text{пр}_{\bar{l}}(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_{\bar{l}}\bar{a} + \text{пр}_{\bar{l}}\bar{b}\ ;$$

3.4. Линейная зависимость векторов. Базис

Определение 3.10. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, не все одновременно равные нулю, что выполняется условие

$$C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2 + \cdots + C_n\bar{a}_n = 0.$$

В противном случае система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется *линейно независимой*.

Если система зависима, то хотя бы один вектор является линейной комбинацией остальных.

Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы. Любые два неколлинеарных вектора линейно независимы. Три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три некомпланарных вектора линейно независимы. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Определение 3.11. *Базисом на плоскости* называются два неколлинеарных вектора, взятых в определенном порядке. *Базисом в пространстве* называются любые три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке

Теорема 3.1. Если на плоскости вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ выбраны в качестве базиса, то любой компланарный с ними вектор $\bar{a}$ можно представить, причем единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса. Если вектора $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ выбраны в качестве базиса в пространстве, то любой вектор $\bar{a}$ можно представить, причем единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

Таким образом, каждому вектору $\bar{a}$ в пространстве можно сопоставить тройку чисел (α, β, γ), которые являются коэффициентами разложения вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Каждой упорядоченной тройке (α,β,γ) с помощью базиса $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, можно сопоставить единственный вектор $\overline{a}=\alpha\overline{e}_1+\beta\overline{e}_2+\gamma\overline{e}_3$.

Определение 3.12. Если $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. – базис и $\overline{a}=\alpha\overline{e}_1+\beta\overline{e}_2+\gamma\overline{e}_3$, то числа (α,β,γ) называются *координатами* вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые координаты в одном и том же базисе. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. При сложении двух векторов их координаты складываются. При переходе к новому базису координаты вектора изменяются.

Пример 3.1. Найти координаты вектора $\overline{d}(-13;2;18)$ в базисе $\overline{a}(1;1;4), \overline{b}(-3;0;2), \overline{c}(1;2;-1)$.

Решение

Запишем разложение вектора $\overline{d}$ по векторам $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$:

$\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}$, или, в координатах,

$$\begin{cases} -13=\alpha\cdot 1\cdot+\beta\cdot(-3)+\gamma\cdot 1, \\ 2=\alpha\cdot 1\cdot+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 2, \\ 18=\alpha\cdot 4\cdot+\beta\cdot 2+\gamma\cdot(-1). \end{cases}$$

Решим эту систему относительно α,β,γ по формулам Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-29,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} -13 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 18 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-58,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -13 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 18 & -1 \end{vmatrix}=-145,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -13 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 18 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда $\alpha=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-58}{-29}=2$, $\beta=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-145}{-29}=5$, $\gamma=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{0}{-29}=0$.

Таким образом, в базисе $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ вектор $\overline{d}$ имеет координаты $(2;5;0)$, или $\overline{d}=2\overline{a}+5\overline{b}$.

Ответ: $\overline{d}=2\overline{a}+5\overline{b}$.

3.5. Декартова система координат в пространстве

Выберем в пространстве точку O. Рассмотрим произвольную точку M. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M по отношению к точке O.

Выберем в пространстве базис $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Тогда точке M можно сопоставить упорядоченную тройку чисел $(б, в, г)$, являющуюся координатами вектора $\overline{OM}$ в базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$.

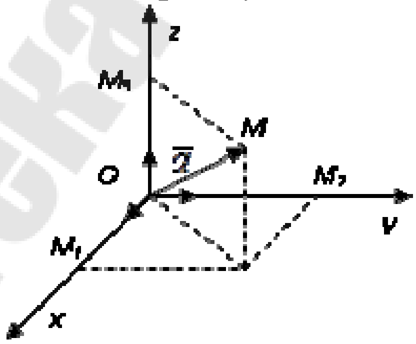
Определение 3.13. *Декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность точки O и базиса $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$.

Точка O называется *началом координат*, прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *координатными осями*. Ось, направленная вдоль $\overline{e}_1$, называется *осью абсцисс*, вдоль $\overline{e}_2$, – *осью ординат*, вдоль $\overline{e}_3$, – *осью аппликат*.

Плоскости, проходящие через координатные оси, называются *координатными плоскостями*.

Определение 3.14. *Координатами точки* M в рассматриваемой системе координат называются координаты радиус-вектора точки M относительно начала координат. Первая координата называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой*.

Определение 3.15. Базис, в котором все вектора попарно перпендикулярны (ортогональны) и имеют единичную длину, называется *ортонормированным*. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной системой координат.*



Базисные вектора в ней обозначают $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{a}$ в пространстве и совместим его начало с началом координат. Таким образом, $\overline{a} = \overline{OM}$. Найдем проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси:

$$a_x = \text{пр}_{\overline{x}}\overline{a} = |OM_1|,\ a_y = \text{пр}_{\overline{y}}\overline{a} = |OM_2|,\ a_z = \text{пр}_{z}\overline{a} = |OM_3|.$$

Согласно правилу параллелепипеда,

$$\bar{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}.$$

Так как $\overline{OM_1} = \left|\overline{OM_1}\right| \cdot \bar{i} = \text{пр}_{\bar{x}}\bar{a} \cdot \bar{i}$, $\overline{OM_2} = \left|\overline{OM_2}\right| \cdot \bar{j} = \text{пр}_{\bar{y}}\bar{a} \cdot \bar{j}$, $\overline{OM_3} = \left|\overline{OM_3}\right| \cdot \bar{k} = \text{пр}_{\bar{z}}\bar{a} \cdot \bar{k}$, то

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \tag{3.1}$$

Формула (3.1) называется *разложением вектора по ортам координатных осей*. Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора. Таким образом, координаты вектора равны его проекциям на соответствующие оси.

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно, дважды применив теорему Пифагора, найти длину вектора:

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,,} \tag{3.2}$$

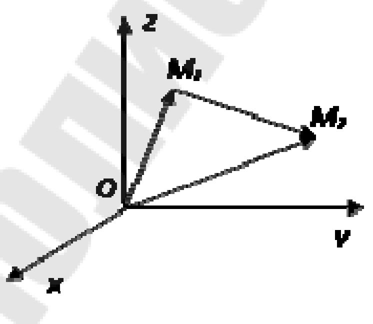
т.е. модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Пусть вектор $\bar{a}$ образует с координатными осями углы α, β, γ. Тогда по свойству проекции (см. п. 3.3.)

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \tag{3.3}$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называют *направляющими косинусами* вектора $\bar{a}$.

Очевидно, вектор $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ имеет то же направление, что и вектор $\bar{a}$. Кроме того, ввиду формул (3.2) и (3.3), его длина равна единице. Таким образом, вектор $\bar{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ является ортом вектора $\bar{a}$.



Рассмотрим тепрь точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольной системе координат и найдем координаты вектора $\overline{M_1M_2}$. Так как согласно правилу треугольника

$$\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1},$$

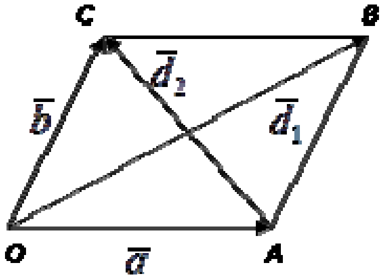
а $\overline{OM_1}(x_1, y_1, z_1)$, $\overline{OM_2}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \qquad (3.4)$$

Таким образом, ***чтобы найти координаты вектора, нужно от координат его конца отнять координаты начала***.

Пример 3.2. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (3;-5;8)$ и $\overline{b} = (-1;1;-4)$.

Решение



Построим параллелограмм $OABC$, обозначим $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OC}$, диагонали $\overline{d}_1 = \overline{OB}$, $\overline{d}_2 = \overline{AC}$. Согласно правилу параллелограмма сложения векторов имеем:

$$\overline{d}_1 = \overline{a} + \overline{b} = (2;-4;4),$$
$$\overline{d}_2 = \overline{b} - \overline{a} = (-4;6;-12)$$

Теперь найдем их длины по формуле (3.2):

$$\left|\overline{d}_1\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6,\ \left|\overline{d}_2\right| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-12)^2} = 14.$$

Ответ: 6 и 14.

Замечание. Если в пространстве заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то отыскание расстояния d между ними сводится к нахождению длины вектора $\overline{M_1M_2}$. Используя формулы (3.4) и (3.2), получаем:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (3.5)$$

Таким образом, расстояние между точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат.

Пример 3.3. Найти длину медианы AM в треугольнике ABC, если $A(1;3;-4)$, $B(0;-3;2)$, $C(-2;5;4)$.

Решение

Согласно определению, медиана в треугольнике делит противолежащую сторону пополам. Координаты середины отрезка находятся как среднее арифметическое координат его концов. Таким образом,

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0-2}{2} = -1,$$
$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1,$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Следовательно, $M(-1;1;3)$ – середина BC. Теперь найдем длину медианы по формуле расстояния между двумя точками (3.5).Получим

$$AM = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{57}.$$

Ответ: $\sqrt{57}$.

3.6. Скалярное произведение векторов

Определение 3.16. *Углом* между двумя векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется наименьший угол между этими векторами, приведенными к общему началу.

Определение 3.17. *Скалярным произведением* двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей векторов-сомножителей на косинус угла между ними, т. е.

$$\boxed{\overline{a} \cdot \overline{b} = (\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha.} \tag{3.6}$$

Свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение коммутативно, т. е. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.

2. Скалярное произведение ассоциативно относительно умножения на число, т. е. $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \lambda\overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$.

3. Скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов, т. е. $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т. е.

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0 = |\overline{a}|^2.$$

5. Скалярное произведение векторов равно произведению модуля одного из них на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором. Действительно, так как $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\cos\alpha$, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\text{б} = |\overline{a}|\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}.$$

6. **Критерий ортогональности двух векторов**. Скалярное произведение ненулевых векторо равно нулю тогда и только тогда, сомножители ортогональны.

7. Скалярное произведение двух векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений одноименных координат (доказательство этого факта можно найти в конце раздела 3):

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,.} \tag{3.7}$$

Некоторые приложения скалярного произведения

1. Нахождение угла между векторами $\bar{a}=(x_1.y_1,z_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$.

Из определения скалярного произведения и формул (3.2) и (3.7) следует, что

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\,. \tag{3.8}$$

Алгоритм нахождения угла в треугольнике

Пусть заданы вершины треугольника ABC: $A(x_A,y_A,z_A)$, $B(x_B,y_B,z_B)$, $C(x_C,y_C,z_C)$. Требуется найти косинус угла ABC.

1. Найти координаты векторов, имеющих начало в вершине заданного угла –векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ по формуле (3.4):

$$\overline{BA} = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B) = (x_1,y_1,z_1),$$

$$\overline{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B) = (x_2,y_2,z_2)\,.$$

2. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ по формуле (3.7).
3. Найти длины векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ по формуле (3.2):

$$|\overline{BA}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,,\ |\overline{BC}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$$

4. Найти косинус угла по формуле (3.8).

2. Необходимое и достаточное условие ортогональности двух ненулевых векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0\,.$$

3. Вычисление проекции вектора $\bar{b}$ на направление вектора $\bar{a}$:

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \qquad (3.9)$$

4. Вычисление работы постоянной силы

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Действительно, из школьного курса физики известно, что работа силы, направленной под углом α к перемещению, вычисляется по формуле $A = F\cdot S\cdot\cos\alpha$, т.е.

$$A = \bar{F}\cdot\bar{S}.$$

Пример 3.4. Даны точки $A(1;0;-1)$, $B(-1;2;3)$, $C(0;1;2)$. Найти угол $\angle BAC$.

Решение

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = \left(-1-1;\, 2-0;\, 3-(-1)\right) = \left(-2;\, 2;\, 4\right),\ \overline{AC} = \left(-1;\, 1;\, 3\right).$$

Вычислим скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ и длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = -2\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 4\cdot 3 = 16,$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24},$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}.$$

По формуле (3.8) получаем

$$\cos\angle BAC = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{16}{\sqrt{24}\sqrt{11}} = \frac{16}{2\sqrt{6}\sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{66}},$$

откуда $\angle BAC = \arccos\dfrac{8}{\sqrt{66}} \approx 10^\circ$.

Ответ: $\angle BAC \approx 10^\circ$.

Пример 3.5. Доказать, что векторы $\bar{a} = (2;-4;6)$, $\bar{b} = (3;3;1)$ ортогональны.

Решение

Воспользуемся критерием ортогональности (свойство 6). Найдем скалярное произведение:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 2\cdot 3 + (-4)\cdot 3 + 6\cdot 1 = 0.$$

Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны.

Пример 3.6. Найти проекцию вектора $\bar{a} = (1; -4; 0)$ на направление вектора $\bar{b} = (3; 2; -2)$.

Решение

Воспользуемся формулой (3.9):

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{1\cdot 3 + (-4)\cdot 2 + 0\cdot(-2)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}} = -\frac{5}{\sqrt{17}}.$$

3.7. Векторное произведение векторов

Определение 3.18. Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ наблюдается с конца вектора $\bar{c}$ происходящим против хода часовой стрелки. В противном случае тройка называется левой.

Определение 3.19. *Векторным произведением* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обозначаемый $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b} = [\bar{a},\bar{b}]$, который:

1) имеет модуль, равный произведению модулей сомножителей на синус угла между ними, т.е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\alpha;$$

2) перпендикулярен к плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c}\perp\bar{a}$ и $\bar{c}\perp\bar{b}$;

3) направлен так, что тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является правой.

<u>Свойства векторного произведения</u>

1. Векторное произведение антикоммутативно, т.е. $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$.

2. Векторное произведение ассоциативно относительно умножения на число, т.е. $(\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \bar{a}\times\lambda\bar{b} = \lambda(\bar{a}\times\bar{b})$.

3. Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов, т. е. $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$.

4. **Критерий коллинеарности двух векторов**. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору.

5. Векторное произведение двух векторов $\overline{a}(x_1, y_{1,}, z_1)$ и $\overline{b}(x_2, y_{2,}, z_2)$ можно найти по формуле:

$$\boxed{\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}} \tag{3.10}$$

Вывод формулы (3.10) приведен в конце раздела 3.

Некоторые приложения векторного произведения

1. Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна модулю векторного произведения этих векторов. Соответственно, площадь треугольника равна его половине.

$$S_{\text{пар.}}=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| \tag{3.11}$$

$$S_{\Delta.}=\frac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| \tag{3.12}$$

Алгоритм нахождения площади треугольника

Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$.

1. Найти координаты векторов, имеющих начало в одной из вершин треугольника, например, векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)=(x_1, y_1, z_1),$$
$$\overline{AD}=(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A)=(x_2, y_2, z_2).$$

2. Найти векторое произведение векторов $\overline{AB}\times\overline{AC}$ по формуле (3.10):

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$$

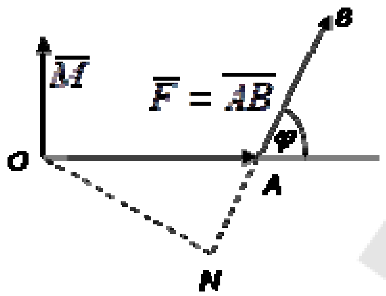
3. Найти длину вектора $\overline{AB}\times\overline{AC}$:

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

4. Найти площадь треугольника по формуле (3.12):

$$S_{\Delta ABC.}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

2. Определение момента силы относительно точки



Пусть в точке A приложена сила $\overline{F}$ и пусть O – некоторая точка пространства. *Моментом силы* $\overline{F}$ относительно точки O называется вектор $\overline{M}$, который проходит через точку O, перпендикулярен плоскости OAB, численно равен произведению силы на плечо и образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

$$\left|\overline{M}\right|=\left|\overline{F}\right|\cdot ON=\left|\overline{F}\right|\cdot\left|\overline{OA}\right|\cdot\sin\alpha=\left|\overline{F}\right|\cdot\left|\overline{OA}\right|\cdot\sin\left(\overline{F},\overline{OA}\right),$$

т. е. $\overline{M}=\overline{OA}\times\overline{F}$.

Пример 3.7. Даны два вектора $\bar{a}=(5;3;-4)$, $\bar{b}=(6;7;-8)$. Найти векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$.

Решение

По формуле (3.10) получаем

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 5 & 3 & -4\\ 6 & 7 & -8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 7 & -8\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}5 & -4\\ 6 & -8\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}5 & 3\\ 6 & 7\end{vmatrix}\bar{k}=4\bar{i}+16\bar{j}+17\bar{k}.$$

Ответ: $\bar{a}\times\bar{b}=(4;16;17)$.

Пример 3.8. Вершины треугольника находятся в точках $A(1;1;3)$, $B(3;-1;6)$, $C(5;1;-3)$. Вычислить площадь треугольника.

Решение

По формуле (3.4) найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=(2;-2;3),\ \overline{AC}=(4;0;-6).$$

Тогда

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\bar{k}=12\bar{i}+24\bar{l}+8\bar{k}.$$

Следовательно, $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\sqrt{784}=28$.

По формуле (3.12) найдем площадь треугольника:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{784}=\frac{1}{2}\cdot 28=14(\textit{ед.}^2).$$

Ответ: 14 *ед.*^{2}

3.8. Смешанное произведение векторов

Определение 3.20. *Смешанным произведением* векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, полученное от скалярного умножения векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}.$$

Свойства смешанного произведения

1. Операции скалярного и векторного произведений в смешанном произведении можно менять местами, т.е. $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$.

2. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке сомножителей, т.е.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}.$$

3. Смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух соседних векторов-сомножителей, т. е.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c},\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a},\ \bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}.$$

4. **Критерий компланарности трех векторов**. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

5. Если векторы $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$ заданы своими координатами, то их смешанное произведение можно найти по формуле:

$$\boxed{\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \qquad (3.13)$$

Вывод формулы (3.13) можно найти в конце раздела 3.

Некоторые приложения смешанного произведения

1. Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – правая, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$ – левая.

2. Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен смешанному произведению этих векторов, взятому со знаком «плюс», если вектора образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку, т.е.

$$V = \left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right| \qquad (3.14)$$

Нетрудно показать, что объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, равен

$$V_{\textit{пирамиды}} = \frac{1}{6} V_{\textit{параллелепипеда}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|.$$

Алгоритм нахождения объема пирамиды

Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$.

1. Найти координаты векторов, имеющих начало в одной из вершин пирамиды, например, векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (x_1, y_1, z_1),$$

$$\overline{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\overline{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A) = (x_3, y_3, z_3)$$

2. Найти смешанное произведение векторов $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)$ по формуле (3.13):

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

3. Найти объем пирамиды $ABCD$ по формуле (3.15)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|$$

Пример 3.9. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = (2;1;3)$, $\overline{b} = (1;3;1)$, $\overline{c} = (3;1;2)$.

Решение

Согласно формуле (3.14) $V = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |-13| = 13.$

Ответ: 13.

Пример 3.10. Доказать, что векторы $\overline{a} = (1;-2;3)$, $\overline{b} = (4;-5;6)$, $\overline{c} = (5;-7;9)$ компланарны.

Решение

Воспользуемся критерием компланарности. Так как $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} = 0$, то можно утверждать, что данные векторы компланарны.

Пример 3.11. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(6;1;4)$, $B(1;-3;7)$, $C(2;-2;-5)$, $D(7;1;3)$.

Решение

Используя формулу (3.4), найдем координаты векторов, на которых построена пирамида:

$\overline{AB}=(-5;-4;3)$, $\overline{AC}=(-4;-3;-9)$, $\overline{AD}=(1;0;-1)$.

Вычислим смешанное произведение полученных векторов по формуле (3.13):

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-5 & -4 & 3\\ -4 & -3 & -9\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-15+36+0+9-0+16=46.$$

Следовательно, $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\cdot 46=7\frac{2}{3}(ед^3)$

Ответ: $7\frac{2}{3}ед^3$.

Пример 3.12. Выяснить, лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(6;1;3)$ в одной плоскости.

Решение

По формуле (3.4) найдем координаты векторов: $\overline{AB}=(3;-1;6)$, $\overline{AC}=(-2;0;2)$, $\overline{AD}=(5;-1;4)$. Теперь проверим выполнение критерия компланарности. Так как $\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 5 & -1 & 4\end{vmatrix}=0$, то векторы компланарны, а значит, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Дополнительные материалы к разделу 3

Докажем формулу (3.7). Действительно, пусть $\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$, $\overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$. Умножим скалярно вектор $\overline{a}$ на $\overline{b}$:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right)=x_1x_2\overline{i}\,\overline{i}+x_1y_2\overline{i}\,\overline{j}+$$
$$+x_1z_2\overline{i}\,\overline{k}+y_1x_2\overline{j}\,\overline{i}+y_1y_2\overline{j}\,\overline{j}+y_1z_2\overline{j}\,\overline{k}+z_1x_2\overline{k}\,\overline{i}+z_1y_2\overline{k}\,\overline{j}+z_1z_2\overline{k}\,\overline{k}.$$

Так как ввиду свойств 4 и 5 скалярного произведения $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{j}\cdot\overline{k}=\overline{k}\cdot\overline{j}=\overline{j}\cdot\overline{i}=\overline{k}\cdot\overline{i}=0$, $\overline{i}\cdot\overline{i}=\overline{j}\cdot\overline{j}=\overline{k}\cdot\overline{k}=1$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Докажем, что векторное произведение векторов, заданных своими координатами, определяется формулой (3.10). Для этого составим таблицу векторного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

$\times$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	0	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	0	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	0

Пусть теперь $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$. Тогда, с учетом свойств 2 и 3 векторного произведеня,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left(x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}\right) \times \left(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}\right) =$$

$$= x_1x_2\bar{i} \times \bar{i} + x_1y_2\bar{i} \times \bar{j} + x_1z_2\bar{i} \times \bar{k} + y_1x_2\bar{j} \times \bar{i} + y_1y_2\bar{j} \times \bar{j} + y_1z_2\bar{j} \times \bar{k} +$$

$$+ z_1x_2\bar{k} \times \bar{i} + z_1y_2\bar{k} \times \bar{j} + z_1z_2\bar{k} \times \bar{k} =$$

$$= x_1y_2\bar{k} - x_1z_2\bar{j} - y_1x_2\bar{k} + y_1z_2\bar{i} + z_1x_2\bar{j} - z_1y_2\bar{i} =$$

$$= \left(y_1z_2 - z_1y_2\right)\bar{i} + \left(z_1y_2 - x_1z_2\right)\bar{j} + \left(x_1y_2 - y_1x_2\right)\bar{k}.$$

Заметим, что $y_1z_2 - z_1y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, $z_1y_2 - x_1z_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$, $x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$. Тогда полученную формулу можно переписать в виде:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Покажем, что смешанное произведение векторов, заданных своими координатами, определяется формулой (3.13). Пусть $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$, $\bar{c} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k}$. Тогда

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k}.$$

Умножим теперь полученный вектор скалярно на вектор $\bar{c}$, воспользуемся правилом Лапласа для вычисления определителя и окончательно получим:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Тестовые задания

1. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются:
   а) коллинеарными;
   б) компланарными;
   в) ортогональными;
   г) единичными;
   д) нулевыми.
2. Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются:
   а) коллинеарными;
   б) компланарными;
   в) ортогональными;
   г) сонаправленными;
   д) нулевыми.
3. Длина вектора $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ находится по формуле:
   а) $|\overline{a}|=\sqrt{a_1+a_2+a_3}$;
   б) $|\overline{a}|=\sqrt{a_1 a_2 a_3}$;
   в) $|\overline{a}|=a_1 a_2+a_2 a_3+a_3 a_1$;
   г) $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$;
   д) $|\overline{a}|=a_1^2+a_2^2+a_3^2$.
4. Модуль вектора $\vec{a}(3;4)$ равен
   а) 7; б) 25; в) 1; г) 5; д) 3,5.
5. Даны точки $M(2;0)$ и $N(4;2)$. Вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты:
   а) (6; 2); б) (–2; –2); в) (2; 2);
   г) (2; –2); д) (3; 1).
6. Вектор $\vec{a}(1;2)$ коллинеарен вектору $\vec{b}(-2;\alpha)$, если
   а) $\alpha=-4$; б) $\alpha=0$; в) $\alpha=-2$;
   г) $\alpha=-1$; д) $\alpha=2$.

7. Если вектор $\vec{a}$ ортогонален вектору $\vec{b}$, то

а) $\vec{a}\times\vec{b}=0$; б) $\vec{a}+\vec{b}=0$; в) $\vec{a}-\vec{b}=0$;

г) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; д) $\vec{a}\times\vec{b}=1$.

8. Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$, то

а) $\vec{a}\times\vec{b}=0$; б) $\vec{a}+\vec{b}=0$; в) $\vec{a}-\vec{b}=0$;

г) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; д) $\vec{a}\times\vec{b}=1$.

9. Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равна

а) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; б) $\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$; в) $\dfrac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}|}$;

г) $\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$; д) $\dfrac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}|}$.

10. Скалярное произведение векторов $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ находится по формуле:

а) $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1y_1z_1+x_2y_2z_2$;

б) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\sqrt{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$;

в) $\bar{a}\cdot\bar{b}=(x_1x_2)^2+(y_1y_2)^2+(z_1z_2)^2$;

г) $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

д) $\bar{a}\cdot\bar{b}=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$

11. Векторное произведение векторов $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ находится по формуле:

а) $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\x_2&y_2&z_2\\x_1&y_1&z_1\end{vmatrix}$; б) $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$;

в) $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$; г) $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2\bar{i}+y_1y_2\bar{j}+z_1z_2\bar{k}$;

д) $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

12. Косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется по формуле:

а) $\cos\alpha=\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{|\bar{b}|}$; б) $\cos\alpha=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$;

в) $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$; г) $\cos\alpha = \dfrac{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}{\bar{a} \cdot \bar{b}}$;

д) $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$.

13. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно найти по формуле:

а) $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$; б) $S = |\bar{a} \cdot \bar{b}|$; в) $S = \dfrac{1}{2}\bar{a} \times \bar{b}$;

г) $S = \bar{a} \cdot \bar{b}$; д) $S = \dfrac{|\bar{a} + \bar{b}|}{2}$.

14. Смешанным произведением векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется:
а) число, определяемое формулой $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$;
б) число, определяемое формулой $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a} \times (\bar{b} \cdot \bar{c})$;
в) число, определяемое формулой $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$;
г) вектор, определяемый формулой $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$;
д) вектор, определяемый формулой $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a} \times (\bar{b} \cdot \bar{c})$;

15. Смешанное произведение векторов $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$ находится по формуле:

а) $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$; б) $x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$;

в) $\begin{vmatrix} x_1\bar{i} & y_1\bar{j} & z_1\bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$; г) $x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$;

д) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

16. Если три вектора компланарны, то:
а) их скалярное произведение равно нулю;
б) их смешанное произведение равно нулю;
в) их векторное произведение равно нулю;

г) их координаты пропорциональны;
д) их сумма равна нулю.

17. Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ вычисляется по формуле:

а) $V = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$;

б) $V = \left|\overline{a} \times \overline{b} \times \overline{c}\right|$;

в) $V = \dfrac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$;

г) $V = \dfrac{1}{6}\left|\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}\right|$;

д) $V = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) \times \overline{c}\right|$.

18. Выберите верные утверждения:

а) $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$; б) $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$; в) $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$;

г) $\overline{a} \times \overline{a} = |\overline{a}|^2$; д) $\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = 1$.

19. Пусть $\left|\overline{a}\right| = 2, \left|\overline{b}\right| = 3$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 90°$. Выберите верные утверждения:

а) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$; б) $\overline{a} \cdot \overline{b} = 6$; в) $\overline{a} \times \overline{b} = 0$;

г) $\overline{a} \times \overline{b} = 6$; д) $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = 6$.

20. Пусть $\overline{a} = (1,0,1)$, $\overline{b} = (0,2,0)$ и $\overline{c} = (1,0,0)$. Выберите верные утверждения:

а) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны;
б) векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны;
в) векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ ортогональны;
г) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку;
д) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют левую тройку.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны векторы $\overline{a} = (2;3;1)$, $\overline{b} = (-1;4;5)$, $\overline{c} = (-3;2;1)$, $\overline{d} = (0;1;-3)$. Докажите, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис и найдите координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

2. При каких значениях m и l векторы $\overline{a} = (m;-2;3)$ и $\overline{b} = (1;l;4)$ коллинеарны?

3. При каком значении α векторы $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + \alpha\bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} + \alpha\bar{j} - 2\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

4. Найти косинусы углов BAC и ABC, если $A(2;-3;-5)$, $B(-1;3;2)$, $C(1;0;-3)$.

5. Даны векторы $\bar{c} = (-2;0;1)$ и $\bar{d} = (1;2;-3)$. Найти $\text{пр}_{\bar{c}}\bar{d}$ и $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c}$.

6. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p} = 2\bar{a} + 4\bar{b}$ и $\bar{q} = 3\bar{b} - \bar{a}$, если $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{\pi}{6}$.

7. Даны векторы $\bar{a} = (1;-2;3)$ и $\bar{b} = (3;0;-1)$. Найти координаты векторов $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\left(2\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{b}$.

8. Вершины треугольника находятся в точках $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$. Найти площадь треугольника ABC и длину высоты h_{AB}.

9. Компланарны ли векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{c} = 2\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}$?

10. Лежат ли точки $A(1;2;1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ в одной плоскости?

11. Правой или левой будет тройка векторов $\bar{a} = (2;3;1)$, $\bar{b} = (-1;4;5)$, $\bar{c} = (3;2;1)$?

12. Даны вершины пирамиды $A(1;2;0)$, $B(-1;3;2)$, $C(1;0;-3)$, $S(0;1;2)$. Вычислить ее объем и высоту H_{ACS}.

Ответы к разделу 3. 1) а; 2) б; 3) г; 4) г; 5) в; 6) а; 7) г; 8) а; 9) г; 10) г;11) б; 12) д; 13) а; 14) а; 15) д; 16) б; 17) в; 18) б, в; 19) а, д; 20) в, д.

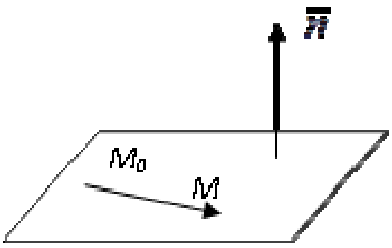
Задания для самостоятельного решения. **1.** $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$. **2.** $m = 3/4$, $l = -8/3$. **3.** $б = -3$. **4.** $\dfrac{23}{3\sqrt{111}}$, $\sqrt{3/8}$. **5.** $\text{пр}_{\bar{c}}\bar{d} = -\sqrt{5}$, $\text{пр}_{\bar{d}}\bar{c} = -5/\sqrt{14}$. **6.** 10. **7.** $б = 60°$. **8.** $(2;10;6)$, $(4;20;12)$. **9.** $2\sqrt{13}$, $4\sqrt{13}/5$. **10.** Да. **11.** Нет. **12.** Правая. **13.** $\sqrt{62}$, $13/\sqrt{62}$.

РАЗДЕЛ 4. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

4.1. Уравнения плоскости в пространстве

Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами, каждому из которых соответствует определенный тип уравнения.

1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.



Определение 4.1. Вектор $\overline{n} = (A; B; C)$, перпендикулярный плоскости, называется ее *нормальным вектором* и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором нормали $\overline{n} = (A; B; C)$. Запишем уравнение этой плоскости. Для этого возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ и составим вектор $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Т.к. вектор $\overline{M_0M}$ лежит в плоскости, то он перпендикулярен вектору $\overline{n}$, а значит, их скалярное произведения равно нулю, т. е. $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Следовательно,

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \tag{4.1}$$

2. Общее уравнение плоскости

Раскроем скобки в уравнении (4.1) и перепишем его в виде:

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

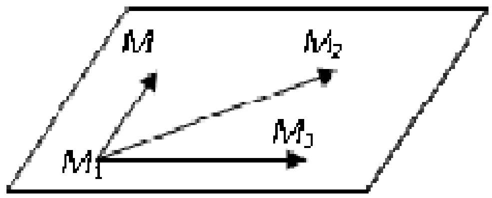
Обозначив $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, получим *общее уравнение плоскости*:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0.} \tag{4.2}$$

Если $D = 0$, то уравнение (4.2) примет вид $Ax + By + Cz = 0$. Точка $O(0;0;0)$ удовлетворяет этому уравнению, а значит, в этом случае плоскость *проходит через начало координат*. Уравнения $z = 0$, $y = 0$ и $x = 0$ задают координатные плоскости xOy, xOz и yOz.

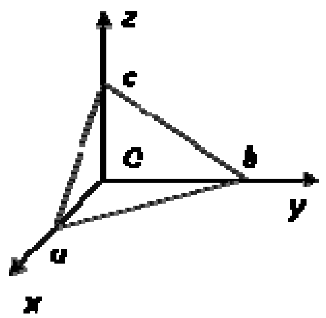
3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Три точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Найдем ее уравнение.



Пусть $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ – заданные точки, не лежащие на одной прямой. Возьмем произвольную точку искомой плоскости $M(x;y;z)$ и составим векторы $\overline{M_1M}(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ и $\overline{M_1M_3}(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$. Т.к. эти векторы лежат в одной плоскости, то они компланарны, а значит, их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.} \tag{4.3}$$



4. Уравнение плоскости «*в отрезках по осям*»

Пусть плоскость отсекает на координатных осях отрезки, соответственно, a, b, c, т.е. проходит через точки $(a;0;0)$, $(0;b;0)$ и $(0;0;c)$. Подставим координаты этих точек в уравнение (4.3) . Получим определитель $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$, вычислив который имеем $bcx + acy + abz - abc = 0$, или

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \tag{4.4}$$

5. Нормальное уравнение плоскости

Разделим обе части общего уравнения (4.2) на модуль вектора нормали, т.е. на $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Получим уравнение:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

Согласно формуле (3.3) коэффициенты при переменных есть направляющие косинусы вектора нормали $\overline{n} = (A;B;C)$. Свободный член

$\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ задает расстояние от начала координат до плоскости.

Обозначив $p=-\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, окончательно имеем:

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0} \qquad (4.5)$$

Уравнение (4.5) называется *нормальным уравнением* плоскости. Это уравнение применяют для исследования взаимного расположения точек и плоскости: две точки лежат по одну сторону от плоскости, если при подстановке их координат в нормальное уравнение плоскости получаются значения одного знака.

Пример 4.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-3;2)$ перпендикулярно к вектору $\overline{n}(5;4;2)$.

Решение

Запишем уравнение плоскости по точке и вектору нормали согласно формуле (4.1):

$$5(x-2)+4(y+3)+2(z-2)=0.$$

Раскрыв скобки, получим общее уравнение: $5x+4y+2z-2=0$.

Ответ: $5x+4y+2z-2=0$.

Пример 4.2. Записать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки с координатами $(-2;1;4)$ и $(3;2;5)$.

Решение

По условию плоскость проходит через три точки $M_1(0;0;0)$, $M_2(-2;1;4)$, $M_3(3;2;5)$. Воспользуемся формулой (4.3):

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -2-0 & 1-0 & 4-0 \\ 3-0 & 2-0 & 5-0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-3x+22y-7z.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид

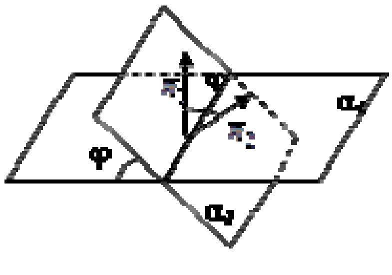
$$-3x+22y-7z=0.$$

Ответ: $-3x+22y-7z=0$.

Основные задачи

1. Нахождение угла между двумя плоскостями. Определение взаимного расположения двух плоскостей.

Пусть заданы две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.



Под *углом между двумя плоскостями* понимают двугранный угол, образованный этими плоскостями. Косинус угла φ между плоскостями определяется как косинус угла между нормальными векторами этих плоскостей $\overline{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2; B_2; C_2)$:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \qquad (4.6)$$

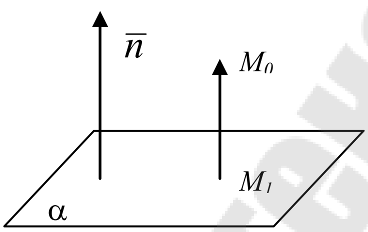
Условие перпендикулярности плоскостей: две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их вектора нормалей (а значит, их скалярное произведение равно нулю), т. е.

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (4.7)$$

Условие параллельности плоскостей: две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их вектора нормалей (а значит, их координаты пропорциональны), т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (4.8)$$

2. Определение расстояния от точки до плоскости



Пусть заданы точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость α своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда расстояние d от точки M_0 до плоскости α равно длине вектора $\overline{M_1M_0}$, где M_1 – проекция точки M_0 на плоскость α. Т.к. вектор $\overline{M_1M_0}$ перпендикулярен к плоскости α, то он коллинеарен ее вектору нормали $\overline{n}(A, B, C)$, а значит,

$$d=\left|\overline{M_1M_0}\right|=\left|\text{пр}_{\overline{n}}\,\overline{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overline{n}\cdot\overline{M_1M_0}}{|\overline{n}|}\right|=$$

$$=\left|\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-\left(Ax_1+By_1+Cz_1\right)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Так как точка M_1 принадлежит плоскости α, то $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$, а значит, $-\left(Ax_1+By_1+Cz_1\right)=D$.

Окончательно получаем:

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \qquad (4.9)$$

Пример 4.3. Найти расстояние от точки $M(-3;5;2)$ до плоскости ABC, если $A(2,1-3)$, $B(-1;1;0)$, $C(3;-1;4)$.

Решение

1. Запишем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, согласно уравнению (4.3):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ -1-2 & 1-1 & 0+3 \\ 3-2 & -1-1 & 4+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки согласно правилу Лапласа:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-2)(0-(-6))-(y-1)(-21-3)+(z+3)(6-0)=$$

$$=6(x-2)+24(y-1)+6(z+3)=6x+24y+6z-18.$$

Таким образом, получим общее уравненние плоскости, проходящей через точки A, B, C:

$$6x+24y+6z-18=0,$$

или, после деления обеих частей равенства на 6,

$$x+4y+z-3=0.$$

2. Теперь найдем расстояние от точки $M(-3;5;2)$ до плоскости ABC по формуле (4.9). Получим:

$$d=\frac{|1\cdot(-3)+4\cdot5+1\cdot2-3|}{\sqrt{1^2+4^2+1^2}}=\frac{16}{\sqrt{18}}=\frac{16}{3\sqrt{2}}\approx4{,}24.$$

Ответ: $4{,}24$.

Пример 4.4. Найти угол между плоскостями $2x+y-z-1=0$ и $z=0$.

Решение

Согласно формуле (4.6) угол между плоскостями определяется углом между их векторами нормалей. Выпишем координаты нормальных векторов обеих плоскостей:

$$n_1=(2{,}1{,}-1),\ n_2=(0{,}0{,}1).$$

Подставим в формулу (4.6):

$$\cos\varphi=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}=\frac{2\cdot0+1\cdot0-1\cdot1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Таким образом, $\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\approx114^\circ$. Так как за угол между плоскостями принимают острый угол, окончательно имеем:

$$180^\circ-114^\circ=66^\circ.$$

Ответ: 66°.

Пример 4.5. При каком значении α плоскости $2x+\alpha y-4z+3=0$ и $3x-2y-z-5=0$ перпендикулярны?

Решение

Выпишем векторы нормалей заданных плоскостей и воспользуемся условием перпендикулярности плоскостей (4.7):

$$n_1=(2,\alpha,-4),\ n_2=(3,-2,-1).$$

Тогда

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 2 \cdot 3 + \alpha \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) = 10 - 2\alpha = 0,$$

откуда $\alpha = 5$.

Ответ: $\alpha = 5$.

Тестовые задания

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,1,4)$ перпендикулярно вектору $n = (3,5,6)$ имеет вид:
   а) $2(x-3)+(y-5)+4(z-6)=0$;
   б) $3x+5y+6z+7=0$;
   в) $2x+y+4z+14=0$;
   г) $(3x-2)+(5y-1)+(6z-4)=0$;
   д) $3(x-2)+5(y-1)+6(z-4)=0$.
2. Плоскость $x-2z+4=0$ имеет вектор нормали:
   а) $(1,-2,0)$; б) $(1,-2,4)$; в) $(1,0,-2)$;
   г) $(1,2,4)$; д) $(0,1,-2)$.
3. Точка $M(1,1,0)$ принадлежит плоскости:
   а) $x-2z+4=0$; б) $x-y+2z=0$;
   в) $x-y+2z-4=0$; г) $x-z+4=0$;
   д) $x-y+4=0$.
4. Если плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ параллельны, то
   а) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;
   б) $\dfrac{A_1}{A_2}+\dfrac{B_1}{B_2}+\dfrac{C_1}{C_2}=0$;
   в) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$;
   г) $A_1A_2=B_1B_2=C_1C_2$;
   д) $A_1B_1C_1=A_2B_2C_2$.
5. Плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда
   а) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;
   б) $\dfrac{A_1}{A_2}+\dfrac{B_1}{B_2}+\dfrac{C_1}{C_2}=0$;

в) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

г) $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$;

д) $A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2$.

6. Плоскости $x + 2y - z + 3 = 0$ и $-2x - 4y + 2z - 6 = 0$

а) параллельны;

б) перпендикулярны;

в) пересекаются;

г) совпадают;

д) скрещиваются.

7. Расстояние от точки $M(2,1,4)$ до плоскости $3x + 2y - z + 3 = 0$ можно вычислить по формуле:

а) $d = \dfrac{|3\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}}$;

б) $d = \dfrac{|3\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}}$;

в) $d = \dfrac{|3\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}}$;

г) $d = \dfrac{|3\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}}}$;

д) $d = \dfrac{|3\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 4 + 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}}$.

8. Уравнение плоскости в отрезках по осям имеет вид:

а) $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = 0$;

б) $\dfrac{a}{x} \cdot \dfrac{b}{y} \cdot \dfrac{c}{z} = 1$;

в) $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$;

г) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$;

д) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0$.

9. Угол между плоскостями $3x + y + z = 0$ и $x - y + 5 = 0$ равен:

а) $0°$; б) $30°$; в) $45°$; г) $60°$; д) $90°$.

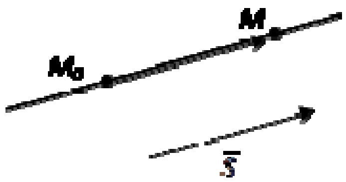
10. Пусть задана плоскость $3x + z = 0$. Выберите верные утверждения:
   а) плоскость проходит через начало координат;
   б) плоскость содержит ось Oy;
   в) плоскость параллельна плоскости xOz;
   г) плоскость перпендикулярна плоскости xOz;
   д) плоскость пересекает ось Oy.

Ответы. 1) д; 2) в; 3) б; 4) б; 5) а; 6) г; 7) д; 8) г; 9) д; 10) а, б, г.

4.2. Прямая в пространстве

Рассмотрим различные виды уравнений прямой в пространстве. Заметим, что положение прямой определено, если задана какая-либо ее точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\bar{s}(m; n; p)$, параллельный этой прямой. Такой вектор называется *направляющим вектором прямой*.

1. Канонические уравнения прямой (по точке и направляющему вектору)



Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющий вектор $\bar{s}(m; n; p)$. Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$, запишем вектор $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Так как вектор $\overline{M_0M}$ лежит на прямой, то он параллелен вектору $\bar{s}(m; n; p)$, а значит, их координаты пропорциональны, т. е.

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \qquad (4.10)$$

Это и есть *канонические уравнения прямой*.

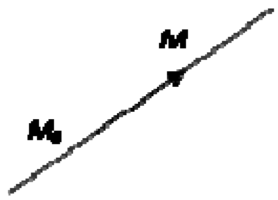
2. Параметрические уравнения прямой (по точке и направляющему вектору)

Приравняем каждое отношение в равенстве (4.10) к параметру t и выразим переменные x, y, z:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt\,. \\ z = z_0 + pt \end{cases}} \qquad (4.11)$$

Полученные уравнения называются *параметрическими уравнениями прямой*, параллельной вектору $\bar{s}(m;n;p)$ и проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки



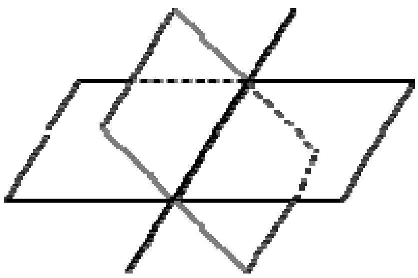
Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Тогда вектор

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, то, с учетом уравнения (4.10) имеем:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}} \qquad (4.12)$$

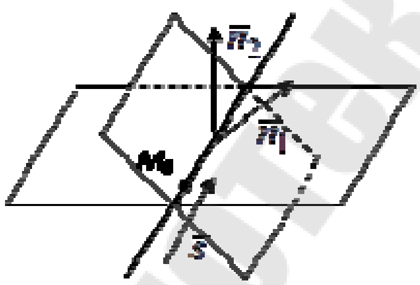
4. Общие уравнения прямой



Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (4.13)$$

Для того чтобы от общих уравнений (4.13) перейти к каноническим уравнениям (4.10), необходимо:



1) найти координаты точки, лежащей на прямой. Так как прямая является пересечением плоскостей, то координаты точки должны удовлетворять системе уравнений (4.13), которая имеет бесконечное число решений. Выбираем любое из них $(x_0;y_0;z_0)$;

2) найти координаты направляющего вектора $\bar{s}$. Вектор $\bar{s}$ перпендикулярен нормальным векторам $\bar{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\bar{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ заданных плоскостей, поэтому может быть найден как их векторное произведение:

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Замечание. Канонические уравнения прямой легко также получить, взяв какие-либо две точки на прямой и использовав уравнение (4.12).

Пример 4.6. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3;-2;5)$ и $M_2(6;1;7)$.

Решение

Запишем уравнение прямой по двум точкам по формуле (4.10):

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z-5}{7-5},$$

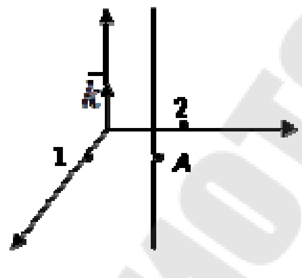
$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{2}.$$

Приравняв в последнем уравнении каждое из отношений к параметру t, получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}.$$

Пример 4.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2;0)$ параллельно оси Oz.

Решение



Так как прямая параллельна оси Oz, то в качестве направляющего вектора можно взять любой вектор, лежащий на этой оси, в частности, вектор $\bar{k}(0;0;1)$. Запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}.$$

Замечание. Нули в знаменателях полученных выражений не означают необходимость делить на нуль. Они означают лишь то, что все точки прямой имеют одну и ту же координату по соответствующей оси. Можно переписать уравнение этой же прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = t. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$.

Пример 4.8. Записать канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} 3x + y - z + 5 = 0, \\ 2x + y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Прямая задана своими общими уравнениями. Чтобы записать ее в каноническом виде, воспользуемся приведенным выше алгоритмом.

1. Выберем какую-либо точку на прямой, координаты которой удовлетворяют заданной системе уравнений. Для этого положим одну из переменных, например, переменную z, равной нулю, и найдем x и y:

$$\begin{cases} 3x + y = -5, \\ 2x + y = -3. \end{cases}$$

Решив систему, имеем: $x = -2$, $y = 1$, т. е. прямая проходит через точку $M_0(-2; 1; 0)$.

2. Выпишем координаты векторов нормалей пересекающихся плоскостей $\bar{n}_1(3; 1; -1)$ и $\bar{n}_2(2; 1; 2)$, и найдем их векторное произведение:

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 8\bar{j} + \bar{k}.$$

Запишем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}.$$

Ответ: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

Основные задачи

1. Нахождение угла между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

Пусть заданы две прямые, l_1 и l_2 своими каноническими уравнениями:

$$(l_1):\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } (l_2):\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Так как под углом между двумя прямыми понимают угол между их направляющими векторами, то косинус его определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2}{|\bar{s}_1|\cdot|\bar{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (4.14)$$

Для нахождения острого угла нужно взять модуль этого выражения.

Из условий ортогональности и коллинеарности векторов следуют соответствующие условия для прямых:

Условие перпендикулярности прямых: две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их направляющие вектора (а значит, их скалярное произведение равно нулю), т.е.

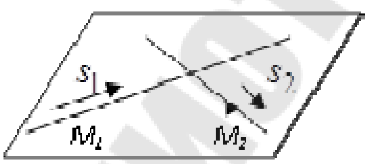
$$\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2=m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (4.15)$$

Условие параллельности прямых: две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их направляющие вектора (а значит, их координаты пропорциональны), т.е.

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (4.16)$$

2. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Как известно, две непараллельные прямые в пространстве пересекаться (если лежат в одной плоскости) или не пересекаться (т. е. скрещиваться).



Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$(l_1):\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и}$$

$$(l_2):\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Если l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, то векторы $\bar{s}_1(m_1; n_1; p_1)$, $\bar{s}_2(m_2; n_2; p_2)$ и $\overline{M_1M}_2 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ также лежат в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), т. е. являются компланарными. В силу критерия компланарности трех векторов их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.17)$$

При выполнении условия (4.17) прямые лежат в одной плоскости и либо пересекаются, либо, если выполняется условие $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, параллельны. Если же определитель $\Delta \neq 0$, то прямые скрещиваются.

3. Нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве.

Пусть в пространстве задана прямая l своими каноническими уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$, не лежащая на прямой. Поместим начало направляющего вектора $\bar{s}(m; n; p)$ в точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и построим параллелограмм на векторах $\bar{s}(m; n; p)$ и $\overline{M_0M}_1$. Тогда расстояние d от точки M_1 до прямой l будет равно высоте этого параллелограмма, опущенной из вершины M_1. Т.к. согласно геометрическому смыслу векторного произведения $S_{параллелограмма} = \left|\overline{M_0M}_1 \times \bar{s}\right|$, то

$$d = \frac{S_{параллелограмма}}{|\bar{s}|} = \frac{\left|\overline{M_0M}_1 \times \bar{s}\right|}{|\bar{s}|}.$$

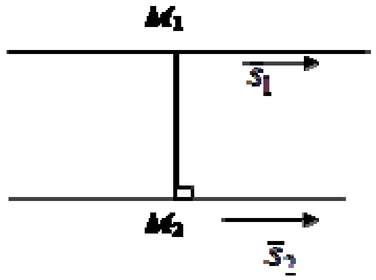
Итак, расстояние от точки до прямой в пространстве вычисляется по формуле:

$$\boxed{d = \frac{\left|\overline{M_0M}_1 \times \bar{s}\right|}{|\bar{s}|}} \qquad (4.18)$$

4. Нахождение расстояния между прямыми в пространстве.

Пусть в пространстве заданы две прямые, l_1 и l_2 своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$



Возможны следующие случаи:

1) прямые параллельны (выполняется условие $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$);

В этом случае расстояние между прямыми равно расстоянию от любой точки прямой l_1, в частности, от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, до прямой l_2. Используя формулу (4.18) имеем:

$$d=\frac{\left|\overline{M_1M_2}\times\bar{s}_2\right|}{\left|\bar{s}_2\right|}; \tag{4.19}$$

2) прямые пересекаются.

В этом случае расстояние между прямыми равно нулю. Напомним, что это возможно тогда и только тогда, когда

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

и при этом не выполняется условие $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

3) прямые скрещиваются.

В силу доказанного выше, это возможно только в том случае, когда $\Delta\neq 0$. В этом случае расстояние между прямыми определяется как высота параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$, в основании которого лежит параллелограмм, образованный векторами $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$, и находится по формуле:

$$d=\frac{\left|\overline{M_1M_2}\bar{s}_1\bar{s}_2\right|}{\left|\bar{s}_1\times\bar{s}_2\right|} \tag{4.20}$$

Пример 4.9. Определить угол между прямыми $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

Решение

Направляющие векторы исходных прямых $\bar{s}_1(2;1;-2)$ и $\bar{s}_2(1;-1;4)$. Косинус угла между прямыми найдем по формуле (4.14):

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 4}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}} = -\frac{7}{3\sqrt{18}} = -\frac{7}{9\sqrt{3}}.$$

Тогда $\varphi = \arccos\left(-\frac{7}{9\sqrt{3}}\right) \approx 116{,}7^\circ$ (или $63{,}3^\circ$, если требуется острый угол).

Ответ: $63{,}3^\circ$.

Пример 4.10. При каких значениях a и b прямые $\frac{x-1}{a} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{3}$ параллельны?

Решение

Запишем условие параллельности прямых (4.16):

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{b} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда $b = \frac{3}{2}$, $a = \frac{4}{3}$.

Ответ: $b = 3/2$, $a = 4/3$.

Пример 4.11. Установить взаимное расположение прямых $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{5}$.

Решение

Запишем направляющие векторы прямых: $\bar{s}_1(-1;\,2;\,3)$, $\bar{s}_2(3;\,2;\,5)$. Так как $\frac{-1}{3} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{3}{5}$, то прямые не параллельны. Следовательно, они пересекаются или скрещиваются. Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0+2 & -4-3 & 3-4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -82 \neq 0,$$

а значит, прямые не пересекаются.

Ответ: прямые скрещиваются.

Тестовые задания

1. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,1,4)$ параллельно вектору $\bar{s}=(3,5,6)$ имеет вид:

   а) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-6}{4}$;

   б) $3x+5y+6z+7=0$;

   в) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-4}{6}$;

   г) $\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{y+1}{5}+\dfrac{z+4}{6}=0$;

   д) $3(x-2)+5(y-1)+6(z-4)=0$.

2. Прямая $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-4}{0}$ имеет направляющий вектор:

   а) $(-2,1,4)$; б) $(2,-1,-4)$; в) $(5,-4,-4)$;

   г) $(-3,5,0)$; д) $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{5},-4\right)$.

3. Направляющий вектор прямой $\begin{cases} x=3-3t \\ y=-2+t \\ z=-1+2t \end{cases}$ равен

   а) $(3,-2,-1)$; б) $(3,1,2)$; в) $(-3,1,2)$;

   г) $(0,-1,1)$; д) $(-3,0,2)$.

4. Прямой $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z-4}{2}$ принадлежит точка

   а) $A(-2,1,4)$; б) $B(-3,-5,2)$; в) $C(2,-1,-4)$;

   г) $D(3,5,-2)$; д) $O(0,0,0)$.

5. Если прямые $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ параллельны, то

   а) $\dfrac{m_1}{m_2}+\dfrac{n_1}{n_2}+\dfrac{p_1}{p_2}=0$; б) $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$;

   в) $m_1m_2=n_1n_2=p_1p_2=0$; г) $m_1n_1p_1=m_2n_2p_2$;

   д) $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

6. Прямые $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

а) $\dfrac{m_1}{m_2}+\dfrac{n_1}{n_2}+\dfrac{p_1}{p_2}=0$; б) $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$;

в) $m_1m_2=n_1n_2=p_1p_2=0$; г) $m_1n_1p_1=m_2n_2p_2$;

д) $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

7. Прямые $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{-4}$ и $\begin{cases} x=3-3t \\ y=-2+t \\ z=-1+2t \end{cases}$

а) параллельны;
б) перпендикулярны;
в) пересекаются;
г) совпадают;
д) скрещиваются.

8. Если $\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$, то прямые $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$:

а) параллельны;
б) перпендикулярны;
в) пересекаются;
г) совпадают;
д) скрещиваются.

9. Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ можно вычислить по формуле:

а) $d=|\bar{s}|$; б) $d=\left|\overline{M_0M}_1\times\bar{s}\right|$;

в) $d=\dfrac{\left|\overline{M_0M}_1\cdot\bar{s}\right|}{|\bar{s}|}$; г) $d=\dfrac{\left|\overline{M_0M}_1\times\bar{s}\right|}{|\bar{s}|}$;

д) $d=\dfrac{\left|\overline{M_0M}_1\cdot\bar{s}\right|}{\left|\overline{M_0M}\right|_1}$.

10. Угол между прямыми $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ можно найти по формуле:

а) $\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}+\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$;

б) $\sin\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$;

в) $\sin\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$;

г) $\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$;

д) $\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

Ответы. 1) в; 2) г; 3) в; 4) а; 5) б; 6) д; 7) а; 8) д; 9) г; 10) д.

4.3. Прямая и плоскость в пространстве

Основные задачи

1. Нахождение угла между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Определение 4.2. *Углом между прямой и плоскостью* называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть плоскость α задана своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, а прямая l – каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

Обозначим через φ угол между прямой и плоскостью. Тогда угол между нормальным вектором плоскости $\bar{n}(A;B;C)$ и направляющим вектором прямой $\bar{s}(m;n;p)$ будет равен $\frac{\pi}{2}-\varphi$. Тогда ***синус угла между прямой и плоскостью*** можно определить по формуле:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\overline{n}\cdot\overline{s}}{|\overline{n}|\cdot|\overline{s}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (4.21)$$

Условие параллельности прямой и плоскости: прямая и плоскость параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\overline{n}(A;B;C)$ и $\overline{s}(m;n;p)$ перпендикулярны, т. е.

$$\overline{n}\cdot\overline{s}=Am+Bn+Cp=0. \qquad (4.22)$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы $\overline{n}(A;B;C)$ и $\overline{s}(m;n;p)$ коллинеарны, т. е. их координаты пропорциональны:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (4.23)$$

2. Определение точки пересечения прямой и плоскости. Условие принадлежности прямой данной плоскости.

Найдем *точку пересечения* прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Для этого запишем уравнения прямой в параметрическом виде и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

Подставив выражения для x, y, z в уравнение плоскости и перегруппировав слагаемые, получим уравнение

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \qquad (4.24)$$

Если прямая не параллельна плоскости (т.е. $Am+Bn+Cp\neq 0$), то можно найти значение t:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp},$$

подставив которое в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения.

Если же $Am + Bn + Cp = 0$, то возможны два случая:

1) если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то уравнение (4.24) не имеет решений, а значит, прямая и плоскость параллельны и не имеют общих точек.

2) если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то уравнение (4.24) имеет бесконечно много решений, т. е. прямая целиком лежит в плоскости. Следовательно, ***условием принадлежности прямой плоскости*** является одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}. \tag{4.25}$$

Пример 4.12. Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-3}$ и плоскости $x + 3y - 3z + 8 = 0$.

Решение

1. Преобразуем каноническое уравнение прямой в параметрическое:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-3} = t,$$

откуда $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$

2. Запишем систему:

$$\begin{cases} x + 3y - 3z + 8 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

Получим уравнение:

$$(2 + t + 3(1 + 3t) - 3(-2 - 3t) + 8 = 0,$$

$$19t = 19,$$

$$t = 1.$$

3. вычислим координаты точки M пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x_M = 2 + 1 = 3 \\ y_M = 1 + 3 \cdot 1 = 4 \\ z_M = -2 - 3 \cdot 1 = -5 \end{cases}$$

Ответ: $M(3; 4; -5)$.

Пример 4.13. Найти угол между прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-3}$ и плоскостью $3y-4z+1=0$.

Решение

1. Запишем направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости:
$$\bar{s}(1,4,-3),\ \bar{n}(0,3,-4).$$
2. Найдем синус угла между прямой и плоскостью по формуле (4.21):
$$\sin\varphi=\frac{\bar{n}\cdot\bar{s}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{s}|}=\frac{0\cdot 1+3\cdot 4-4\cdot(-3)}{\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2+3^2}}=\frac{24}{5\sqrt{26}}.$$

Следовательно, угол между прямой и плоскостью
$$\varphi=\arcsin\frac{24}{5\sqrt{26}}\approx 70^\circ.$$

Ответ: 70°.

Тестовые задания

1. Если прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ параллельны, то

а) $Am+Bn+Cp=0$; б) $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$;

в) $Am=Bn=Cp$; г) $\frac{A}{m}+\frac{B}{n}+\frac{C}{p}=0$;

д) $\frac{Ax_0}{m}+\frac{By_0}{n}+\frac{Cz_0}{p}=0$.

2. Прямая $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

а) $Am+Bn+Cp=0$;

б) $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$;

в) $Am=Bn=Cp$;

г) $\dfrac{A}{m}+\dfrac{B}{n}+\dfrac{C}{p}=0$;

д) $\dfrac{Ax_0}{m}+\dfrac{By_0}{n}+\dfrac{Cz_0}{p}=0$.

3. Если для прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ выполняется условие $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$, то:

а) прямая и плоскость параллельны;

б) прямая и плоскость перпендикулярны;

в) прямая и плоскость пересекаются под произвольным углом;

г) прямая лежит в плоскости;

д) прямая и плоскость скрещиваются.

4. Прямая $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-3}$ и плоскость $x+4y-3z+1=0$

а) параллельны;

б) перпендикулярны;

в) пересекаются под произвольным углом;

г) прямая лежит в плоскости;

д) скрещиваются.

5. Прямая $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-5}{3}$ и плоскость $x+4y-3z+1=0$

а) параллельны;

б) перпендикулярны;

в) пересекаются под произвольным углом;

г) прямая лежит в плоскости;

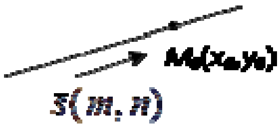
д) скрещиваются.

Ответы. 1) а; 2) б; 3) г; 4) б; 5) а.

4.4. Прямая на плоскости

Так как прямая на плоскости xOy представляет собой частный случай прямой в пространстве, то ее можно задать практически теми же уравнениями.

Каноническое уравнение прямой



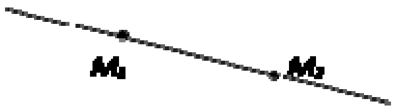
$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},} \qquad (4.26)$$

где $\bar{s}(m;n)$ – направляющий векторпрямой, $M_0(x_0;y_0)$ – точка, лежащая на прямой.

Параметрические уравнения прямой

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}} \qquad (4.27)$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

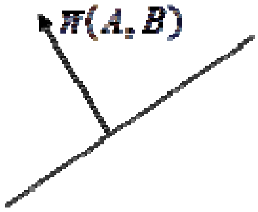


$M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \qquad (4.28)$$

.

Общее уравнение прямой



Так как прямая на плоскости xOy есть линия пересечения плоскостей $Ax+By+Dz+C=0$ и $z=0$, то общее уравнение имеет вид:

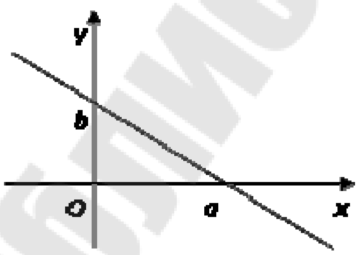
$$Ax+By+C=0 \qquad (4.29)$$

Здесь вектор $\bar{n}(A;B)$ – любой вектор, перпендикулярный данной прямой (*вектор нормали*).

Уравнение прямой по точке $M_0(x_0;y_0)$ *и вектору нормали* $\bar{n}(A;B)$

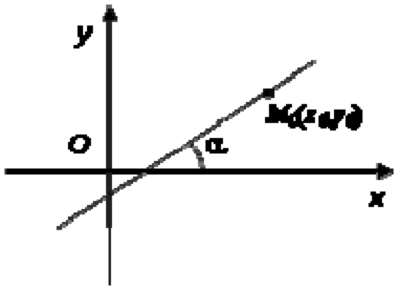
$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0} \qquad (4.30)$$

Уравнение прямой в «отрезках по осям»



Если в общем уравнении прямой перенести C в противоположную сторону и разделить правую и левую части на $-C$, то получим уравнение прямой в «отрезках по осям»:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad (4.31)$$



Уравнение по точке $M_0(x_0; y_0)$ *и угловому коэффициенту* k, *где* $k = \mathrm{tg}\alpha$ (α *– угол наклона прямой к* положительному направлению оси Ox):

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \qquad (4.32)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b \qquad (4.33)$$

Если две прямые заданы своими каноническими или общими уравнениями, то *угол* между ними можно определить как угол между соответствующими направляющими векторами или векторами нормалей. Кроме того, *угол между прямыми* $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ можно определить по формуле:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}} \qquad (4.34)$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Условие параллельности двух прямых:

$$k_1 = k_2.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (4.35)$$

Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы для нахождения расстояния от точки до плоскости.

Пример 4.14. Для прямой $3x - 4y - 12 = 0$ записать ее уравнение в «отрезках по осям».

Решение

Преобразуем исходное уравнение прямой: $3x-4y=12$. Теперь правую и левую части равенства разделим на 12: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$. Получили уравнение прямой, которое соответствует уравнению (4.31).

Ответ: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$.

Пример 4.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;5)$:

а) параллельно прямой $y=3x+2$;

б) перпендикулярно прямой $y=3x+2$.

Решение

Угловой коэффициент k_1 прямой $y=3x+2$ равен 3, следовательно, в силу условия параллельности прямых, угловой коэффициент искомой прямой также равен 3. Запишем уравнение прямой по угловому коэффициенту и точке согласно (4.32):

$$y-5=3(x+2),$$

откуда $y=3x+11$ – искомое уравнение прямой.

В силу условия перпендикулярности прямых, угловой коэффициент искомой прямой $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{3}$. Тогда уравнение прямой примет вид

$$y-5=-\frac{1}{3}(x+2),$$

или, после преобразований, $x+3y-13=0$.

Ответ: $y=3x+11$; $x+3y-13=0$.

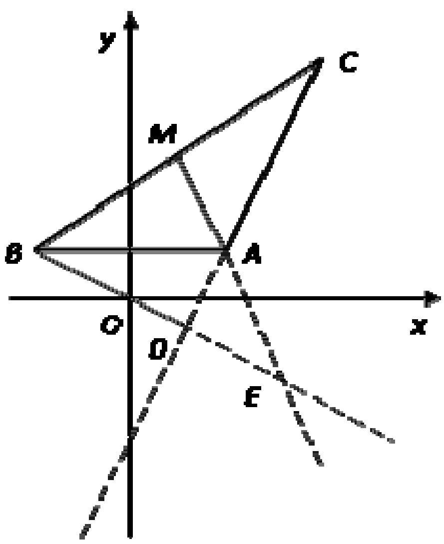
Пример 4.16. Доказать, что прямые $2x+3y+1=0$ и $6x-4y+3=0$ взаимно перпендикулярны.

Решение

Приведем уравнения исходных прямых к виду (4.33): $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ и $y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$. Запишем угловые коэффициенты: $k_1=-\frac{2}{3}$ и $k_2=\frac{3}{2}$. Так как $k_1k_2=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=-1$, то данные прямые перпендикулярны.

Пример 4.17. Даны вершины $A(2;1)$, $B(-2;1)$ и $C(4;5)$ треугольника ABC. Записать уравнения медианы AM и высоты BD этого треугольника. Найти их длины и точку пересечения.

Решение



1. Запишем уравнение медианы AM. По определению медианы точка M делит противолежащую сторону BC пополам, а значит, ее координаты вычисляются по формулам:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1,$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;1)$ и $M(1;3)$ согласно (4.28):

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{3-1},$$

откуда после упрощения получаем $2x + y - 5 = 0$ – уравнение медианы AM.

2. Запишем уравнение высоты BD. Так как высота перпендикулярна стороне AC, то вектор $\overline{AC} = (2;\, 4)$ можно рассматривать как вектор нормали прямой BD. Составим уравнение прямой по точке $B(-2;1)$ и вектору нормали согласно (4.30):

$$2(x+2) + 4(y-1) = 0,$$

или $x + 2y = 0$.

Это и есть уравнение высоты BD.

3. Найдем точку пересечения прямых AM и BD. Для этого составим систему:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим $x = 10/3$, $y = -5/3$, т.е. медиана AM и высота BD пересекаются в точке $E(10/3; -5/3)$.

Так как нам известны координаты точек A и M, то длину медианы AM можно найти, воспользовавшись формулой для нахождения расстояния между двумя точками (3.5):

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}\approx 2{,}2\,.$$

Так как координаты точки D нам неизвестны, то нельзя применить эту же формулу для нахождения высоты BD. Заметим, что длина BD равна расстоянию от точки B до прямой AC, а значит, ее можно найти по формуле (4.35). Запишем каноническое уравнение прямой AC по точке $A(2;1)$ и направляющему вектору $\overline{AC}=(2;\,4)$:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4},$$

откуда $2x-y-3=0$ – уравнение прямой AC.

В виду формулы (4.35)

$$BD=\frac{|2\cdot(-2)-1\cdot 1-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}\approx 3{,}6.$$

Ответ: $AM:2x+y-5=0$, $BD:x+2y=0$, $E(10/3;-5/3)$, $AM\approx 2{,}2$, $BD\approx 3{,}6$.

Алгоритм нахождения расстояния от точки $D(x_D,y_D)$ до прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A,y_A)$ и $B(x_B,y_B)$.

1. Записать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки по формуле (4.28):

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}.$$

2. Преобразовать полученное уравнение к виду

$$\frac{x-x_A}{m}=\frac{y-y_A}{n},$$

а затем – к общему уравнению прямой на плоскости вида $Ax+By+C=0$, воспользовавшись свойством пропорции $(x-x_A)n=(y-y_A)m$ и раскрыв скобки.

3. Найти расстояние от точки $D(x_D,y_D)$ до прямой AB по формуле (4.35):

$$d=\frac{|Ax_D+By_D+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Тестовые задания

1. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(3,5)$ имеет вид:
   а) $3(x-2)+5(y-1)=0$;
   б) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{5}$;
   в) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{1}$;
   г) $(3x-2)+(5y-1)=0$;
   д) $2(x-3)+(y-5)=0$.
2. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,1)$ параллельно вектору $\overline{s}=(3,5)$ имеет вид:
   а) $3(x-2)+5(y-1)=0$;
   б) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{5}$;
   в) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{1}$;
   г) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{5}$;
   д) $2(x-3)+(y-5)=0$.
3. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(1,2)$ и $B(3,4)$, имеет вид:
   а) $\dfrac{x+1}{2+1}=\dfrac{y+3}{4+3}$; б) $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-3}{4-3}$;
   в) $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{4-2}$; г) $\dfrac{x-2}{1-2}=\dfrac{y-4}{3-4}$;
   д) $\dfrac{x+1}{3+1}=\dfrac{y+2}{4+2}$.
4. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2)$ и имеющей угловой коэффициент, равный 3, имеет вид:
   а) $y-1=3(x-2)$; б) $(x-1)=3(y-2)$;
   в) $y-2=3(x-1)$; г) $y+3x=2$;
   д) $y-3x=2$.

5. Уравнение прямой в отрезках по осям имеет вид:

а) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=0$; б) $\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}=1$; в) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$;

г) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; д) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$.

6. Угол между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ можно вычислить по формуле:

а) $\cos\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$; б) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$;

в) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2+k_1}{k_1k_2}$; г) $\sin\varphi=\frac{k_2+k_1}{1-k_1k_2}$;

д) $\cos\varphi=\frac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}$.

7. Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ можно найти по формуле:

а) $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

б) $d=\frac{|Ax_0+By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

в) $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

г) $d=\frac{|Ax_0+By_0|}{\sqrt{A^2\cdot B^2}}$;

д) $d=\frac{|Ax_0+By_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

8. Какие из следующих прямых параллельны прямой $y=2x+5$?

а) $y=2x$; б) $y=5$; в) $y-2x+1=0$;

г) $x=2y+5$; д) $2y-4x+1=0$.

9. Какие из следующих прямых перпендикулярны прямой $y=3$?

а) $y=-3$; б) $x=5$; в) $x+3=0$;

г) $y=3y$; д) $y=-3x$.

10. Задана прямая $y-4x+1=0$. Выберите верные утверждения:

а) прямая проходит через начало координат;

б) прямая проходит через точку $M(1;3)$;

в) угловой коэффициент прямой равен 4;

г) направляющий вектор прямой равен $(1,-4)$;

д) вектор нормали прямой равен $(1,-4)$.

Ответы. 1) а; 2) г; 3) в; 4) в; 5) г; 6) б; 7) а; 8) а, в, д; 9) б, в; 10) б, в, д.

Задания для самостоятельного решения

1. Записать уравнение и построить плоскость:

а) проходящую через точку C перпендикулярно вектору $\overline{DC}$, если $C(3;-5;0)$, $D(2;3;4)$;

б) проходящую через ось Oz и точку $A(-3;1;-5)$;

в) проходящую через точку $M_0(7;-3;5)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки;

2. Вычислить угол между плоскостями $3x-7y+5z+9=0$ и $2x-y+3z+3=0$.

3. Найти расстояние между плоскостями $2x-3y+5z+3=0$ и $4x-6y+10z-5=0$.

4. При каких значениях a, b, c

а) плоскости $ax-y+3z+3=0$ и $2x-y+az+3=0$ перпендикулярны?

б) плоскости $bx-y+3z+2=0$ и $2x-cy-6z+3=0$ параллельны?

5. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(3;-2;0)$ параллельно вектору $\overline{b}(3;-7;5)$;

б) проходящей через точку $A(3;-2;0)$ параллельно оси Ox;

в) проходящей через точку $N(-2;0;4)$ перпендикулярно к плоскости xOy;

г) проходящей через точку $M_0(7;-3;5)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 3 \\ z = 3t - 5 \end{cases}$$

д) проходящей через точку $D(2;3;4)$ перпендикулярно к плоскости $3x - 7y + 5z + 9 = 0$;

е) проходящей через точки $C(2;1;-2)$ и $D(2;3;4)$.

6. Составить уравнение медианы AD в треугольнике ABC, если $A(0;-2;5)$, $B(3;4;1)$, $C(1;0;-5)$.

7. Найти расстояние от точки $M_0(8;5;4)$ до прямой $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{1}$.

8. Установить взаимное расположение прямых $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ и $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{5}$.

9. Определить, лежат ли точки $A(1;-2;3), B(2;1;-1), C(3;4;-5)$ на одной прямой.

10. Найти угол между прямой $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{2}$ и плоскостью $2x - 3y + 5z + 3 = 0$.

11. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 5 = 0$.

12. При каких значениях p и q прямая $\dfrac{x}{p} = \dfrac{y-2}{-8} = \dfrac{z-1}{-1}$ перпендикулярна плоскости $3x - y + qz + 3 = 0$?

13. Даны точки $A(1;-5;7), B(2;1;-1), C(4;1;6), D(-2;5;3)$.

а) определить, лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости;

б) найти расстояние от точки D до плоскости, проходящей через точки A, B, C;

в) найти расстояние от точки C до прямой AB;

г) найти точку пересечения прямой CD и плоскости $2x - 3y + 5z + 5 = 0$.

д) уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC;

е) найти значения p и q, при которых плоскость $px + qy - 5z + 3 = 0$ параллельна плоскости ABC;

ж) найти значения m и l, при которых прямая AB параллельна прямой $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + mt \\ z = 4 + lt \end{cases}$

з) найти значение a, при котором прямая AB параллельна плоскости $ax - 3y + 1 = 0$.

14. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$:

а) параллельно оси Ox; Oy;

б) параллельно вектору $\vec{a}(-3;6)$;

в) перпендикулярно вектору $\vec{a}(-3;6)$;

г) и точку пересечения прямых $3x - 2y - 4 = 0$ и $2x - y - 3 = 0$;

е) и отсекающей на оси Ox отрезок, равный $a = -2$;

ж) параллельно прямой $3x - 2y - 4 = 0$;

з) перпендикулярно прямой $3x - 2y - 4 = 0$.

15. Найти угол между прямыми $4x + 10y - 3 = 0$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{5}$.

Ответы. **1.**. а) $x - 8y - 4z - 43 = 0$; б) $x - 3y = 0$; в) $x + y + z - 9 = 0$; **2.** $\arccos\sqrt{\frac{14}{83}} \approx 66°$. **3.** $11/2\sqrt{38}$. **4.** $a = -1/5$, $b = -2$, $c = -1$. **5.** а) $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z}{5}$; б) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{0}$; в) $\frac{x+2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-4}{1}$; г) $\frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{7}$; д) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-7} = \frac{z-4}{5}$; е) $\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{6}$. **6.** $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{-7}$. **7.** 2. **8.** а) прямые скрещиваются. **9.** Да. **10.** $\arcsin\frac{2}{\sqrt{38}}$. **11.** $M(2;3;1)$. **12.** $p = 24$, $q = -1/8$. **13.** а) нет; б) $\approx 6{,}2$; в) $\approx 4{,}9$; г) $(-14;13;-3)$; д) $\frac{x+2}{42} = \frac{y-5}{-23} = \frac{z-3}{-12}$; е) $p = 17{,}5$, $q = -9\frac{7}{12}$; ж) $m = -6$, $l = 8$; з) $a = 18$. **14.** а) $y = -2$, $x = 3$; б) $2x + y - 4 = 0$; в) $x - 2y - 7 = 0$; г) $3x + y - 7 = 0$; д) $x + y - 1 = 0$; е) $2x + 5y + 4 = 0$; ж) $3x - 2y - 13 = 0$; з) $2x + 3y = 0$. **15.** $90°$.

РАЗДЕЛ 5. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

5.1. Эллипс

Определение 5.1. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

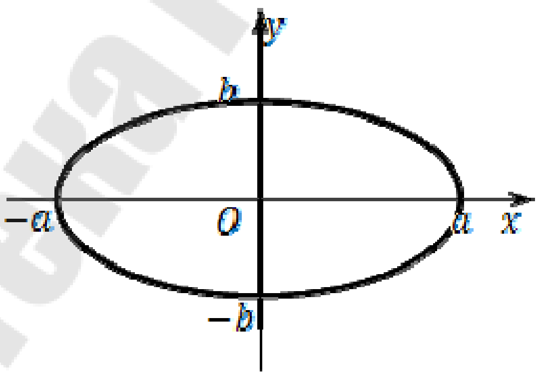
Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{5.1}$$

Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением (5.1).

1. Уравнение содержит только квадраты переменных, следовательно, эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy. Ось симметрии, на которой расположены фокусы, называется *фокальной осью*, точка $O(0;0)$ – *центром* эллипса. Так как $\frac{x^2}{a^2}\le 1$, $\frac{y^2}{b^2}\le 1$, то $|x|\le a$, $|y|\le b$.



2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. При $y=0$ имеем $x=\pm a$, при $x=0$, $y=\pm b$. Точки пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами эллипса*. Отрезок, соединяющий вершины $(-a;0)$ и $(a;0)$, называется *большой осью*, а отрезок, соединяющий точки $(0;-b)$ и $(0;b)$ – *малой осью*. Числа a и b называют, соответственно, *большой полуосью* и *малой полуосью*.

Длину отрезка F_1F_2, равную $2c$, называют *фокусным расстоянием*, величину $c=\sqrt{a^2-b^2}$ – *полуфокусным расстоянием*.

3. Параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Определение 5.2. Отношение фокусного расстояния к длине большой оси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается ε. Таким образом, если эллипс задан каноническим уравнением (5.1), то эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Т.к. $c < a$, то эксцентриситет эллипса меньше единицы.

Если $a = b = R$, то эллипс превращается в *окружность* $x^2 + y^2 = R^2$. В этом случае $c = 0$, эксцентриситет окружности ε также равен нулю. Чем ближе отношение $\frac{b}{a}$ к единице, тем ближе эллипс к окружности.

Определение 5.3. Прямые, перпендикулярные к большей оси эллипса и расположенные симметрично относительно его центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются *директрисами* эллипса.

Таким образом, уравнения директрис имеют вид: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Т.к. эксцентриситет эллипса $\varepsilon < 1$, то директрисы расположены левая – левее, а правая – правее вершин эллипса.

5.2. Гипербола

Определение 5.4. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, модуль разность расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).

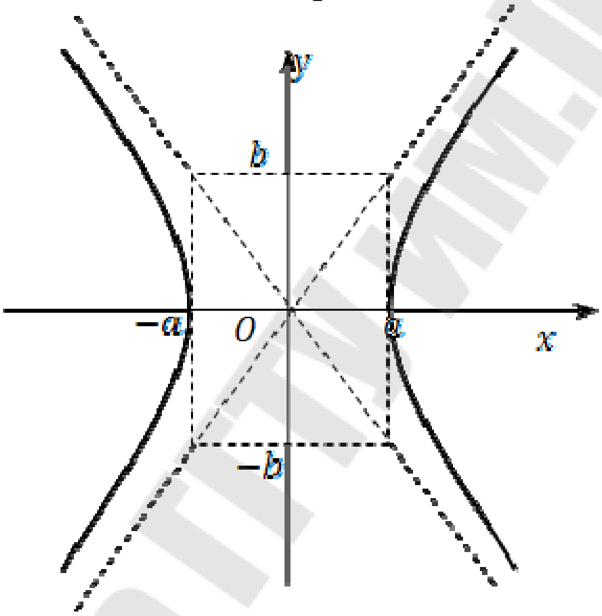
Рассуждая так же, как при выводе канонического уравнения эллипса, можно получить *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (5.2)$$

Исследование формы гиперболы по ее каноническому уравнению:

1. Гипербола симметрична относительно осей координат. Ось, содержащая фокусы, называется *фокальной осью*. Начало координат $O(0;0)$ является *центром* гиперболы. Точки $(-a;0)$ и $(a;0)$ пересечения с осью Ox называются *вершинами* гиперболы. Точек пересечения с осью Oy нет, т.к. при $x=0$ уравнение $-\frac{y^2}{b^2}=1$ не имеет решений.

Ось симметрии, пересекающая гиперболу, называется *действительной* осью, а ось, не пересекающая гиперболу, – *мнимой осью*. Для уравнения (5.2) действительная ось равна $2a$, мнимая – $2b$.



2. Так как $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$, то $|x|\geq a$. Следовательно, точки гиперболы расположены вне полосы $-a\leq x\leq a$.

3. График гиперболы имеет *асимптоты*, задаваемые уравнениями:

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

4. Параметрические уравнения гиперболы имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t. \end{cases}$$

Определение 5.5. Отношение фокусного расстояния к длине действительной оси называется *эксцентриситетом* гиперболы. Если гипербола задана каноническим уравнением (5.1), то эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Т.к. $c > a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Аналогично определению директрис эллипса определяются директрисы гиперболы. Уравнения директрис имеют вид: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$. Так как эксцентриситет гиперболы больше единицы, то директрисы расположены внутри полосы $|x| < a$.

Замечание. Очевидно, что уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ будет определять гиперболу, фокусы которой находятся на оси Oy, вершины – в точках $(0;-b)$ и $(0;b)$. Эксцентриситет такой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а уравнения директрис будут иметь вид $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

5.3. Парабола

Определение 5.6. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом параболы, и данной прямой DD_1, называемой ее директрисой.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (5.3)$$

Исследование формы параболы по ее каноническому уравнению:

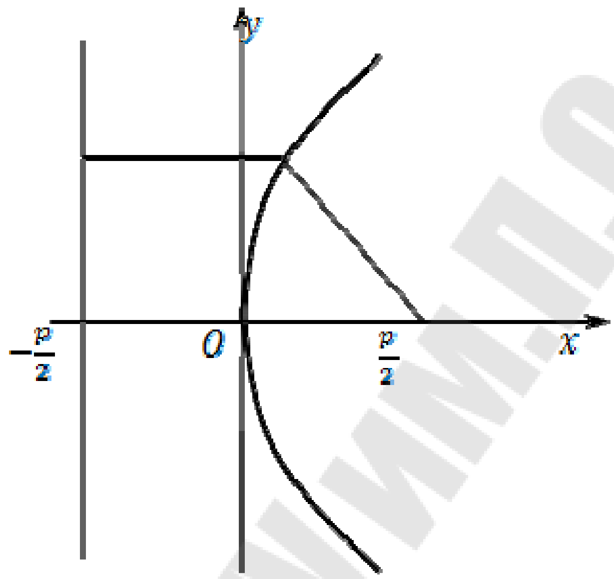
1. График симметричен относительно оси Ox. Точка $O(0;0)$ пересечения параболы с осью симметрии называется *вершиной* параболы.

2. При $p > 0$ переменная x может принимать только неотрицательные значения, при $p < 0$ – только неположительные.

Как известно, для эллипса и гиперболы отношение расстояния r от любой точки до фокуса к расстоянию d до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Если определить *эксцентриситет параболы* как отношение $\frac{r}{d}$, то по определению параболы ее эксцентриситет равен единице:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon = 1.$$



Парабола, гипербола, эллипс – кривые второго порядка, обладают *общим геометрическим свойством*: для любой их точки отношение расстояния r до фокуса к расстоянию d до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

5.4. Поверхности второго порядка

Цилиндрическая поверхность

Определение 5.7. *Цилиндрической поверхностью* называется всякая поверхность, которая может быть получена движением прямой, перемещающейся параллельно некоторому вектору и все время пересекающей данную линию, называемую *направляющей*. Движущаяся прямая называется *образующей*.

Если уравнение цилиндрической поверхности не содержит одну из координат, то оно определяет цилиндрическую поверхность, образованную движением направляющей, параллельно координатной оси, соответствующей отсутствующей координате, и имеет вид:

$F(x, y) = 0$ – цилиндрическая поверхность параллельна Oz;

$F(x, z) = 0$ – цилиндрическую поверхность параллельна Oy;

$F(y, z) = 0$ – цилиндрическую поверхность параллельна Ox.

Коническая поверхность

Определение 5.7. *Конической поверхностью* называется поверхность, образованная движением прямой, проходящей через данную точку, называемую вершиной конуса, и скользящей по данной кривой. Движущаяся прямая называется *образующей* конуса, а кривая, по которой скользит образующая – *направляющей*. В общем виде уравнение конической поверхности определяется уравнениями направляющей

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

и образующей

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0},$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты вершины конуса.

Поверхности вращения

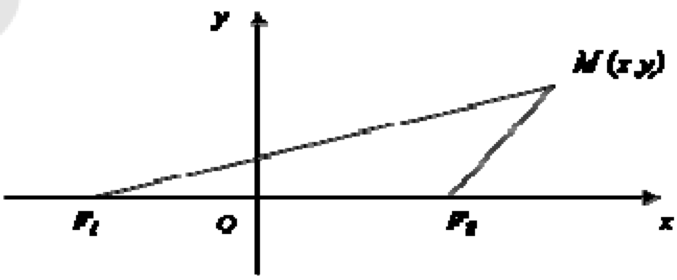
Определение 5.9. Поверхность, образованная вращением линии вокруг оси, называется *поверхностью вращения*.

Из определения следует, что в сечении поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, будут получаться окружности с центрами на оси вращения.

Для того чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz, вокруг оси Oz, нужно в уравнении этой линии заменить y на $yOz \pm \sqrt{x^2+y^2}$. Знак перед корнем должен совпадать в соответствующих точках со знаком координаты y на исходной кривой.

Дополнительные материалы к разделу 5

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Ox проходила через точки F_1 и F_2. За начало координат возьмем середину отрезка F_1F_2.



Обозначим расстояние между фокусами $|F_1F_2| = 2c$. Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса, тогда

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,\ MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

По определению эллипса $MF_1 + MF_2 = 2a > 2c$, следовательно,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{5.4}$$

Это и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Преобразуем его к более простому виду. Домножим обе части равенства (5.4) на сопряженный множитель.

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right) =$$

$$= 2a\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right).$$

Тогда

$$\frac{(x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2}{2a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,,$$

Откуда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{2xc}{a}.$$

Сложим полученное уравнение с уравнением (5.4). Получим

$$2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \frac{2xc}{a} + 2a.$$

Разделим обе части выражения на 2 и возведем в квадрат. Имеем:

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{x^2c^2}{a^2},$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{x^2c^2}{a^2},$$

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2,$$

откуда

$$\frac{x^2\left(a^2-c^2\right)}{a^2}+y^2=a^2-c^2 \qquad (5.5)$$

По определению $2a>2c$, следовательно, $a^2-c^2>0$. Обозначим

$$a^2-c^2=b^2.$$

Разделив обе части уравнения (5.5) на b^2, получим *каноническое уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

С помощью аналогичных выкладок можно вывести канонические уравнения гиперболы и параболы.

Тестовые задания

1. Уравнение $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ определяет на плоскости:

   а) эллипс с действительной полуосью, равной 5;
   б) эллипс с большой полуосью, равной 25;
   в) гиперболу с действительной полуосью, равной 5;
   г) гиперболу с действительной полуосью, равной 9;
   д) эллипс с большой полуосью, равной 5.

2. Уравнение эллипса с фокусами на оси Oy и полуосями, равными 1 и 2 имеет вид:

   а) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$;
   в) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=0$; г) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=0$;
   д) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$.

3. Для эллипса $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ фокусное расстояние равно:

   а) 3; б) $2\sqrt{3}$; в) 6;
   г) 5; д) $\sqrt{15}$.

4. Уравнение $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ определяет на плоскости:

   а) гиперболу с мнимой полуосью, равной 5;
   б) эллипс с большой полуосью, равной 25;
   в) гиперболу с действительной полуосью, равной 5;
   г) гиперболу с действительной полуосью, равной 9;
   д) эллипс с большой полуосью, равной 5.

5. Уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox и полуосями, равными 1 и 2 имеет вид:

   а) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=0$; б) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$;
   в) $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{4}=1$; г) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{1}=0$;
   д) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1$.

6. Уравнения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ имеют вид:

   а) $y=\pm\frac{4}{25}x$; б) $y=\pm\frac{5}{2}x$; в) $y=\pm\frac{2}{5}x$;
   г) $x=\pm\frac{2}{5}y$; д) $y=\pm\frac{25}{4}$.

7. Для гиперболы $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$ фокусное расстояние равно:

   а) 3; б) 5; в) 6;
   г) 10; д) $2\sqrt{5}$.

8. Уравнение $y^2=4x$ определяет на плоскости:

   а) параболу с фокусом в точке $F(0,1)$;
   б) параболу с фокусом в точке $F(0,2)$;
   в) параболу с фокусом в точке $F(1,0)$;
   г) параболу с фокусом в точке $F(2,0)$;
   д) параболу с фокусом в точке $F(0,4)$.

9. Уравнение директрисы параболы $y^2=-8x$ имеет вид:

   а) $x=8$; б) $y=8$; в) $x=-4$;
   г) $y=4$; д) $x=2$.

10. Выберете кривые с фокусом на оси Oy:

а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

в) $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1$; г) $y^2=8x$; д) $x^2=5y$.

Ответы. 1) д; 2) а; 3) б; 4) а; 5) б; 6) в; 7) д; 8) в; 9) д; 10) б, в, д.

Задания для самостоятельного решения

1. Дан эллипс $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис. Сделать рисунок.

2. Дана гипербола $4x^2-y^2=16$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать рисунок.

3. Построить параболу, найти ее директрису и фокус, зная каноническое уравнение параболы $x^2=6y$. Записать полярное уравнение.

4. Определить, при каком значении k прямая $y=kx+2$

а) пересекает параболу $y^2=4x$;

б) касается ее;

в) проходит вне параболы.

5. Выяснить, какая фигура соответствует каждому из данных уравнений, и (в случае непустого множества) изобразить в системе координат xOy:

а) $x^2+y^2-4x+6y+1=0$;

б) $4x^2+25y^2+4x-10y-8=0$;

в) $4x^2+y^2-40x+2y-101=0$;

г) $x^2-4y^2+4x+24y-36=0$;

д) $x^2-y^2+2x-2y=0$;

е) $x^2+y^2-x=0$;

ж) $x^2-6x+2y+11=0$;

з) $3x^2-4y^2-12x-8y+20=0$;

и) $y^2-3x-4y+10=0$;

к) $x^2-2x-3=0$;

л) $y^2+4y+4=0$;

м) $9x^2+4y^2-18x+16y+26=0$.

Задания для самостоятельного решения. **4**. а) $k<1/2$; б) $k=1/2$; в) $k>1/2$. **5.** а) окружность; б) эллипс; в) точка; г) гипербола; е) окружность; ж) парабола; з) гипербола; и) парабола; к) пара прямых; л) прямая; м) $\varnothing$.

Индивидуальные задания

Вариант 1

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 + x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2,0,1)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(1,2,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-6,3,-5)$, $B(5,1,-7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2-9)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC.	6. Даны точки $A(6,3,-5)$, $B(5,1,-7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2-9)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(0,-3)$, $B(1,7)$, $C(-2,8)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 2

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = x^2 + 3x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(-3,0,1)$, $\vec{b}(1,0,-2)$, $\vec{c}(-1,4,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(4,6,3)$, $B(5,2,6)$, $C(4,-4,-3)$, $D(1,-2,0)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC.	6. Даны точки $A(4,6,3)$, $B(5,2,6)$, $C(4,-4,-3)$, $D(1,-2,0)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(2,3)$, $B(1,0)$, $C(1,-5)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM.

Вариант 3

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = x^2 + x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(4,1,-1)$, $\vec{b}(0,-1,-2)$, $\vec{c}(1,1,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(5,-1)$, $B(1,7)$, $C(-2,7)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 4

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(4,1,-1)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(1,4,-3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,-2,2)$, $D(2,4,3)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,-2,2)$, $D(2,4,3)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(4,4)$, $B(5,-7)$, $C(2,4)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 5

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=-x^2+4x-3$, $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3=-5\\ -x_1+x_2-2x_3=7\\ 3x_1+x_3=0\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(3,1,-1)$, $\vec{b}(1,2,2)$, $\vec{c}(-1,1,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,-2,2)$, $D(2,0,1)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,-2,2)$, $D(2,0,1)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(0,4)$, $B(-1,-7)$, $C(-2,3)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 6

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2-4x+2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}-2x_1+5x_2+x_3=-2\\ -x_1+3x_2+2x_3=-5\\ 4x_1+4x_2+5x_3=-3\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(3,1,-,1)$, $\vec{b}(1,2,2)$, $\vec{c}(-1,1,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(1,3,-1)$, $B(3,-2,0)$, $C(-1,2,2)$, $D(2,3,1)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(1,3,-1)$, $B(3,-2,0)$, $C(-1,2,2)$, $D(2,3,1)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(4,-3)$, $B(5,-2)$, $C(-2,4)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 7

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2-5x+4$, $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}x_1+6x_2-5x_3=3\\ -6x_1+4x_2+4x_3=-4\\ x_1+5x_2-4x_3=3\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(-1,1,-1)$, $\vec{b}(1,2,3)$, $\vec{c}(0,3,2)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(0,8)$, $B(-4,3)$, $C(-5,6)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 8

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=2x^2+x+2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & -4\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}-4x_1+3x_2+4x_3=1\\ 5x_1+4x_2+4x_3=0\\ -x_1+x_2+4x_3=3\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(3,1,-1)$, $\vec{b}(2,-1,-2)$, $\vec{c}(1,-1,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-6,3,5)$, $B(5,1,3)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-21)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(-6,3,5)$, $B(5,1,3)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-21)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(2,-3)$, $B(1,3)$, $C(-5,10)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 9

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=2x^2+x+1$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 0\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}x_1+4x_2-x_3=9\\ -4x_1+3x_2+2x_3=-2\\ -5x_1+5x_2+2x_3=-1\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(4,2,-1)$, $\vec{b}(1,1,-2)$, $\vec{c}(-1,4,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(-7,5,6)$, $B(-2,5,3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(2,6)$, $B(1,-4)$, $C(2,-8)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 10

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=2x^2+x-3$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ -3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}3x_1-x_2-3x_3=-2\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+3x_3=6\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(5,0,1)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(1,-4,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(-7,5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(-5,-3)$, $B(-1,6)$, $C(-2,2)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 11

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = -x^2 - 2x + 7$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(-2,0,1)$, $\vec{b}(3,-1,-2)$, $\vec{c}(1,0,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-4,-5,-3)$, $B(3,1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(-4,-5,-3)$, $B(3,1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости АВС и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(-2,-3)$, $B(1,3)$, $C(2,5)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 12

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2,-1,0)$, $\vec{b}(3,-1,2)$, $\vec{c}(-1,2,1)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(2,4,5)$, $B(1,-2,3)$, $C(-1,-2,4)$, $D(3,2,-7)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(2,4,5)$, $B(1,-2,3)$, $C(-1,-2,4)$, $D(3,2,-7)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости АВС и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(2,-3)$, $B(-2,4)$, $C(2,-10)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 13

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2-3x-3$, $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3=-3\\ -x_1+x_2-4x_3=2\\ 3x_1-x_2-5x_3=4\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(-4,0,1)$, $\vec{b}(3,-1,-2)$, $\vec{c}(1,1,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(1,3,-1)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,2,2)$, $D(3,2,-7)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(1,3,-1)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,2,2)$, $D(3,2,-7)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(5,-3)$, $B(-5,4)$, $C(-2,5)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 14

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2-2x+6$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ -4 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3\\ x_1+x_2-x_3=-1\\ 5x_1+2x_2-3x_3=2\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(1,1,3)$, $\vec{c}(1,2,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,1)$, $D(4,-2,9)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,1)$, $D(4,-2,9)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(2,-3)$, $B(1,-7)$, $C(2,5)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 15

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2,-2,3)$, $\vec{b}(0,-1,2)$, $\vec{c}(1,3,-1)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(1,3,-1)$, $B(1,1,1)$, $C(3,5,-1)$, $D(-3,-5,2)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(1,3,-1)$, $B(1,1,1)$, $C(3,5,-1)$, $D(-3,-5,2)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(5,-5)$, $B(-3,-7)$, $C(2,-1)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 16

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 + x - 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(-1,2,1)$, $\vec{b}(1,3,2)$, $\vec{c}(-1,2,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(5,2,4)$, $B(-3,5,-7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,-3)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(5,2,4)$, $B(-3,5,-7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,-3)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(0,-5)$, $B(-1,5)$, $C(-4,7)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 17

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2-2x+5$, $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -2\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}5x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2+x_3=2\\ x_1+x_2-x_3=2\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(-4,0,1)$, $\vec{b}(3,-1,2)$, $\vec{c}(1,0,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,-2,2)$, $D(4,2-3)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,-2,2)$, $D(4,2-3)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(2,-3)$, $B(-7,3)$, $C(-2,-4)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 18

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=-x^2+2x-5$, $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=-5\\ 3x_1+3x_2+x_3=7\\ x_1+2x_2+2x_3=4\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(-2,0,4)$, $\vec{b}(1,0,-2)$, $\vec{c}(1,2,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,2-9)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(-6,3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,2-9)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(0,3)$, $B(1,7)$, $C(-2,-8)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 19

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=2x^2+x-3$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}-x_1+9x_2+3x_3=0\\ x_1-2x_2-3x_3=7\\ x_1+x_2+x_3=-2\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(3,0,1)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(4,0,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-6,3,5)$, $B(-5,1,7)$, $C(4,0,-1)$, $D(4,-2-9)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(-6,3,5)$, $B(-5,1,7)$, $C(4,0,-1)$, $D(4,-2-9)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(2,3)$, $B(0,-5)$, $C(1,-5)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 20

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2+4x-3$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}$. Сделайте проверку 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=2\\ x_1-x_2+x_3=0\\ 3x_1+x_2+x_3=6\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(4,1,-1)$, $\vec{b}(0,-1,-,2)$, $\vec{c}(4,0,-3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2-9)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2-9)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(5,-1)$, $B(1,4)$, $C(-2,7)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 21

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2+2x-4$, $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -4\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}-x_1+x_2-5x_3=2\\ 2x_1+3x_2-x_3=-5\\ x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(4,1,-,1)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(1,4,-3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,-2,2)$, $D(2,4,-3)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,-2,2)$, $D(2,4,-3)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(4,4)$, $B(5,-7)$, $C(2,4)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 22

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=2x^2+2x-3$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ 4 & -5 & 0\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=6\\ 2x_1+2x_2+x_3=1\\ x+2x_2+3x_3=0\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(3,1,-1)$, $\vec{b}(1,2,2)$, $\vec{c}(-1,2,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,1)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,2-2)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(0,3,-1)$, $B(1,-2,1)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,2-2)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(0,4)$, $B(-1,-7)$, $C(2,3)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 23

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = -2x^2 + x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(3,1,-1)$, $\vec{b}(1,2,2)$, $\vec{c}(-1,1,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(1,,3,-1)$, $B(3,-2,0)$, $C(1,2,2)$, $D(3,3,1)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(1,,3,-1)$, $B(3,-2,0)$, $C(1,2,2)$, $D(3,3,1)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости АВС и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(4,-3)$, $B(6,3)$, $C(-2,4)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 24

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = x^2 + 5x - 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(-2,0,1)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(1,2,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(1,2,3)$, $B(5,1,-7)$, $C(4,3,6)$, $D(4,-3-6)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(1,2,3)$, $B(5,1,-7)$, $C(4,3,6)$, $D(4,-3-6)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости АВС и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(4,1)$, $B(-1,7)$, $C(2,-8)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 25

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ -x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2,0,1)$, $\vec{b}(4,0,2)$, $\vec{c}(1,-2,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(0,3,5)$, $B(5,-1,-7)$, $C(3,-2,-1)$, $D(4,1,8)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(0,3,5)$, $B(5,-1,-7)$, $C(3,-2,-1)$, $D(4,1,8)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(2,-3)$, $B(-1,7)$, $C(5,4)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 26

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x) = -x^2 + 5x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2,-1,1)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(3,-1,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(1,3,-5)$, $B(5,6,-7)$, $C(3,0,-1)$, $D(4,-2-9)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(1,3,-5)$, $B(5,6,-7)$, $C(3,0,-1)$, $D(4,-2-9)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(0,5)$, $B(-3,-7)$, $C(2,10)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 27

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2+2x-4$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=3\\ x_1+x_2-x_3=3\\ 2x_1+x_2-6x_3=0\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2{,}0{,}1)$, $\vec{b}(1{,}1{,}2)$, $\vec{c}(3{,}1{,}3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-1,-3,5)$, $B(5,0,-7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2-9)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(-1,3,5)$, $B(5,0,-7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2-9)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(7,3)$, $B(-1,7)$, $C(2,-8)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 28

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2-4x+3$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=-1\\ x_1+4x_2-x_3=1\\ 2x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(0{,}2{,}1)$, $\vec{b}(1{,}0{,}2)$, $\vec{c}(1{,}2{,}3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(3,1,4)$, $B(-5,0,-7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2-3)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(3,1,4)$, $B(-5,0,-7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2-3)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(-5,-3)$, $B(1,7)$, $C(2,-2)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 29

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2-2x+5$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=5\\ x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1-2x_2+x_3=5\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2,-1,1)$, $\vec{b}(1,0,2)$, $\vec{c}(1,2,0)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(-1,3,-5)$, $B(5,1,0)$, $C(-3,5,-1)$, $D(4,-2,5)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(-1,3,-5)$, $B(5,1,0)$, $C(-3,5,-1)$, $D(4,-2,5)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости АВС и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(7,-3)$, $B(1,7)$, $C(-2,-8)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Вариант 30

I. Матрицы	II. Векторы	III. Прямые и плоскости
1. Найдите $f(A)$, если $f(x)=x^2-x+3$, $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. 2. Найдите обратную матрицу к матрице А, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Сделайте проверку. 3. Решите систему линейных уравнений тремя способами: $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=3\\ x_1+x_2-x_3=3\\ 2x_1+x_2-6x_3=0\end{cases}$	4. Даны векторы $\vec{a}(2,0,1)$, $\vec{b}(-1,0,2)$, $\vec{c}(1,2,3)$. 1) ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$? 2) коллинеарны ли векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 3) компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$? 5.Даны точки $A(6,3,-5)$, $B(-2,-1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-23)$. Найдите: 1) угол ABC; 2) объем пирамиды $ABCD$; 3) площадь треугольника ABC	6. Даны точки $A(6,3,-5)$, $B(-2,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-23)$. Запишите: 1) уравнение плоскости ABC; 2) уравнение прямой AD; 3) уравнение прямой, перпендикулярной плоскости АВС и проходящей через точку C. Найдите: 4) расстояние от точки D до плоскости ABC; 5) угол между плоскостью ABC и прямой AD. 7. Даны вершины треугольника $A(-5,3)$, $B(1,7)$, $C(-2,-3)$. Запишите: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение высоты CH; 3) уравнение медианы AM;. Найдите: 4) длину высоты CH; 5) точку пересечения высоты CH и медианы AM

Литература

1. Гурский, Е. И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник / Е. И. Гурский. – Минск : Выш. шк., 1982. – 272 с.
2. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 1. – 349 с.
3. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – Т. 1. – 544 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2005. – 234 с.
5. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2004. – 270 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Векторная алгебра (к разделу 3)

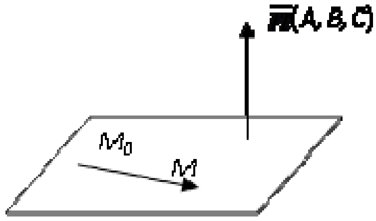
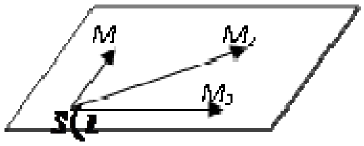
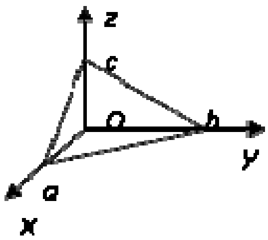
Координаты вектора $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Длина вектора $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$: $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b}$ или $(\overline{a}, \overline{b})$	***Векторное произведение*** $\overline{a} \times \overline{b}$ или $[\overline{a}, \overline{b}]$	***Смешанное произведение*** $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$
$\overline{a} \cdot \overline{b} = \|\overline{a}\| \|\overline{b}\| \cos(\overline{a}, \overline{b})$	$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c}$: 1) $\overline{c} = \|\overline{a}\| \|\overline{b}\| \sin(\overline{a}, \overline{b})$ 2) $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$ 3) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку	$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$
$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$	$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$	$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
Коммутативность: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$	Антикоммутативность: $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$	Цикличность: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b}$
	$\|\overline{a} \times \overline{b}\|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$	$\|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\|$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$
Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов: $\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.	Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов: $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = 0$ или $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.	Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$.
$A = \overline{F} \cdot \overline{S}$, где A – работа, совершаемая силой $\overline{F}$ по перемещению материальной точки на вектор $\overline{s}$.	Если тело неподвижно закреплено в точке A, а в точке B этого тела приложена сила $\overline{F}$, то момент этой силы $\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{F}$.	

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уравнения плоскости (к разделу 4 (4.1))

	1. По точке и вектору нормали $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 2. Общее уравнение $Ax+By+Cz+D=0$
	3. По трем точкам $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
	4. «*в отрезках по осям*» $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Угол между плоскостями:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

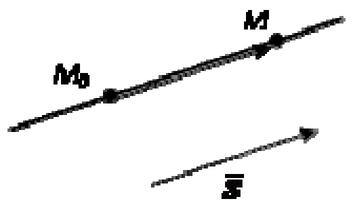
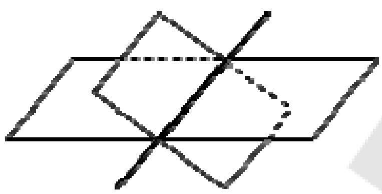
$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$.

Расстояние от точки до плоскости: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Прямая в пространстве (к раздел 4 (4.2))

	1. Канонические уравнения прямой (по точке и направляющему вектору $\mathbf{s}(m,n,p)$) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 2. Параметрические уравнения прямой (по точке и направляющему вектору) $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$
	3. По двум точкам $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$
	4. Общие уравнения прямой (прямая как линия пересечения двух плоскостей) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

Угол между прямыми:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$, *то прямые лежат в одной плоскости.*

Расстояние от точки до прямой в пространстве: $d = \dfrac{\left|\overline{M_0 M_1} \times \bar{s}\right|}{|\bar{s}|}$

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{\bar{n} \cdot \bar{s}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

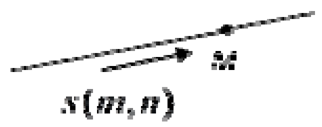
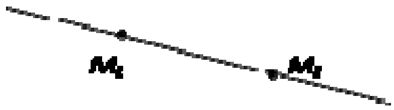
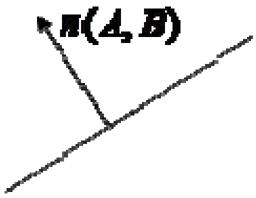
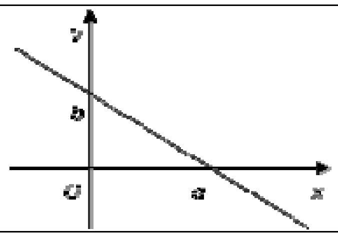
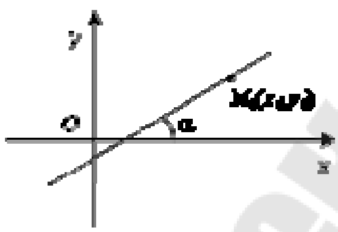
$$\bar{n} \cdot \bar{s} = Am + Bn + Cp = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Прямая на плоскости (к разделу 4 (4.4))

	Каноническое уравнение: $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$ Параметрические уравнения: $$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$$
	Уравнение прямой по двум точкам $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$
	Общее уравнение прямой $$Ax+By+C=0$$ Уравнение по точке и вектору нормали $$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$
	Уравнение «в отрезках по осям» $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$
	Уравнение по угловому коэффициенту и точке $$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$$ Уравнение с угловым коэффициентом $$y=kx+b$$

Угол между прямыми на плоскости $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1\cdot k_2=-1.$$

Условие параллельности двух прямых:

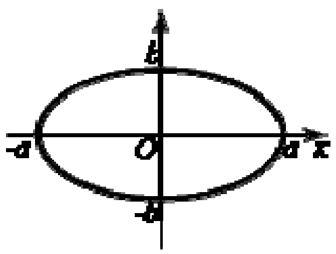
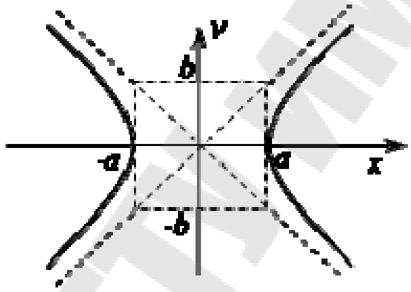
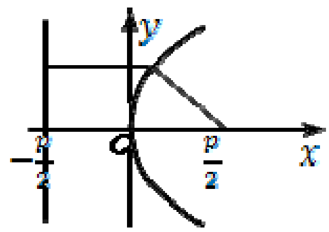
$$k_1=k_2.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

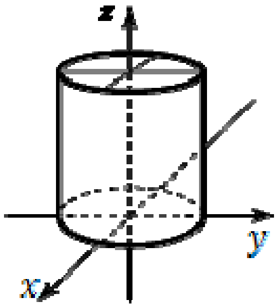
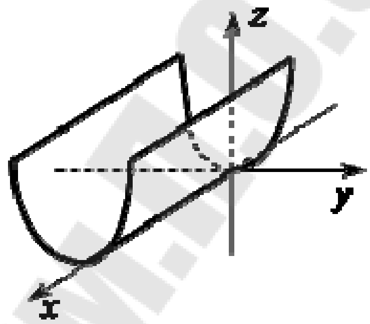
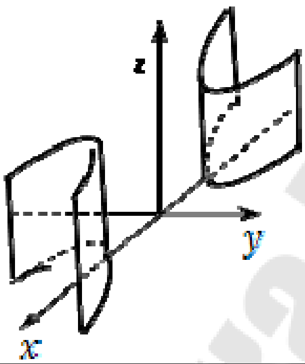
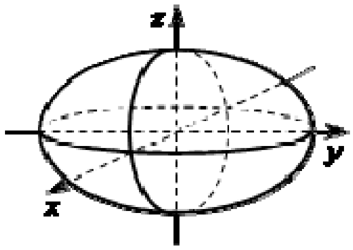
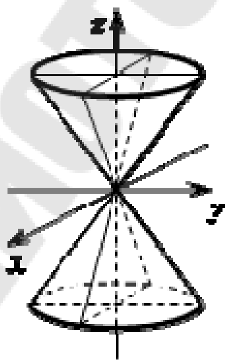
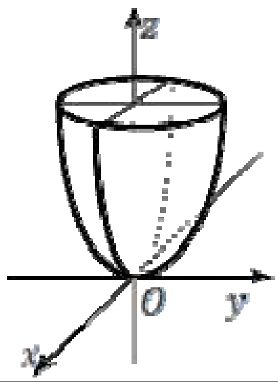
ПРИЛОЖЕНИЕ 5

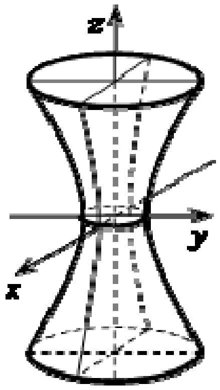
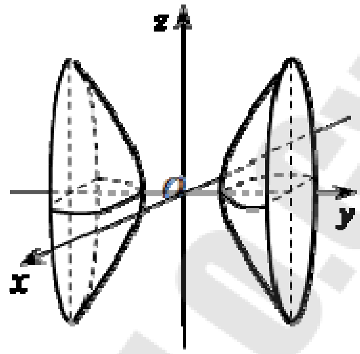
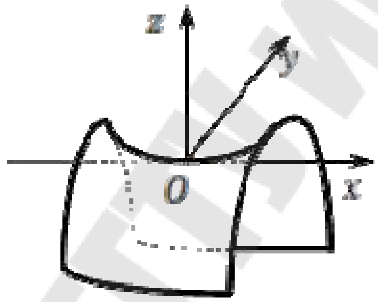
Кривые второго порядка (к разделу 5)

Эллипс	***Гипербола***	***Парабола***
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (фокусы $F_{1,2}$ на оси Ox)	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (фокусы $F_{1,2}$ на оси Ox)	$y^2=2px$ (фокус на оси Ox)
$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
фокусы $F_1(c;0),\ F_2(-c;0)$	*фокусы* $F_1(c;0),\ F_2(-c;0)$	*Фокус* $F(p/2;0)$
эксцентриситет $\varepsilon=c/a<1$ *(фокусное расстояние делить на большую ось)*	*эксцентриситет* $\varepsilon=c/a>1$ *(фокусное расстояние делить на действительную ось)*	*эксцентриситет* $\varepsilon=1$
		

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Поверхности второго порядка (к разделу 5)

Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 	*Параболический цилиндр* $z = ay^2$ 
Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 	*Трехосный эллипсоид* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 
Конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 	*Эллиптический параболоид* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ 

<table>
<tr>
<td>Однополостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
</td>
<td>Двуполостный гиперболоид
$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Гиперболический параболоид
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$
</td>
</tr>
</table>

Содержание

Авакян Елена Зиновьевна
Авакян Сергей Левонович
Задорожнюк Мария Викторовна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей заочной формы обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 11.07.24.

Рег. № 132Е
http://www.gstu.by