Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. М. ЛИФШИЦ

О КОЛЕБАНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 VII 1948)

1. В настоящей заметке нами рассматривается следующая задача. Найти вид потенциальной энергии, обеспечивающей заданную зависимость периода колебаний частицы от ее энергии при релятивистских скоростях; в частности, найти потенциал, дающий изохронные колебания при произвольных энергиях.

Такого рода задача решена, как хорошо известно, в классической механике ([2]). Мы дадим здесь ее решение для произвольной классической системы с функцией Лагранжа

$$L = \varphi(\dot{x}) - u(x), \tag{1}$$

описывающее, как частные случаи, классическое и релятивистское движение частиц.

2. Частица в поле $u = u(x)$ с функцией Лагранжа (1) обладает энергией

$$E = f(\dot{x}) + u, \quad f(z) = -\varphi(z) + z\varphi'(z). \tag{2}$$

Выделяя из E энергию покоя $f(0)$, обозначим энергию движения буквой $\varepsilon = E - f(0)$; тогда, очевидно,

$$f(\dot{x}) - f(0) = \varepsilon - u. \tag{3}$$

Отсюда $\dot{x}$ определится посредством равенства

$$\dot{x} = \frac{1}{g(\varepsilon - u)}, \tag{4}$$

где $g(z)$ есть решение уравнения

$$f\left(\frac{1}{g}\right) = f(0) + z. \tag{5}$$

Так, например, отсчитывая энергию ε в единицах mc^2, а скорость $\dot{x}$ — в единицах c, будем иметь:

а) классическая механика:

$$f(\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2}, \qquad g(z) = \frac{1}{\sqrt{2z}}; \tag{6}$$

б) релятивистская механика (без учета излучения):

$$f(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}, \qquad g(z) = \frac{1+z}{\sqrt{(2+z)\,z}}. \tag{7}$$

(При $z \ll 1$ б) переходит в а).)

Потенциальную энергию $u(x)$ будем считать симметричной относительно начала координат, причем, не ограничивая общности, положим $u(0)=0$. Амплитуда колебаний a определяется из условия $u(a)=\varepsilon$; период колебаний 4τ дается посредством интегрирования (4) формулой

$$\tau = \int_0^a g(\varepsilon - u)\,dx. \tag{8}$$

Полагая $u(x)$ при $x>0$ монотонной функцией и переходя к интегрированию по энергии u, получим

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon g(\varepsilon - u)\,x'(u)\,du. \tag{9}$$

Считая зависимость $\tau(\varepsilon)$ периода от энергии заданной, мы имеем интегро-дифференциальное уравнение (9) для определения неизвестной функции $x = x(u)$.

3. Применяя к обеим частям равенства преобразование Лапласа и пользуясь формулами умножения и дифференцирования*, мы получим ([3]):

$$T(p) = G(p)\,pX(p), \tag{10}$$

где

$$T(p) = \int_0^\infty \tau(\varepsilon)\,e^{-\varepsilon p}\,d\varepsilon,$$

$$G(p) = \int_0^\infty g(z)\,e^{-zp}\,dz, \tag{11}$$

$$X(p) = \int_0^\infty x(z)\,e^{-zp}\,dz.$$

Таким образом,

$$X(p) = H(p)\,T(p), \qquad H(p) = \frac{1}{pG(p)}, \tag{12}$$

а для порождающих эти преобразования функций, согласно теореме умножения, будет:

$$x(u) = \int_0^u h(z)\,\tau(u-z)\,dz, \tag{13}$$

---

* а) Если f_1, f_2, f_3 связаны соотношением

$$f_1(t) = \int_0^t f_2(t)(t-s)\,f_3(s)\,ds,$$

то их преобразования Лапласа удовлетворяют равенству

$$F_1(p) = F_2(p)\,F_3(p).$$

б) Если $g(t) = f'(t)$, то $G(p) = pF(p)$.

где $h(z)$ определяется уравнением

$$H(p)=\int_0^\infty h(z)\,e^{-zp}\,dz. \tag{14}$$

Формальное решение (14) дается известной формулой обращения Римана — Меллина:

$$h(z)=\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H(p)\,e^{-pz}\,dp, \qquad \sigma>0. \tag{15}$$

Формулы (13) и (15) дают искомую функцию $x(u)$.

4. Выражение (15) неудобно для исследования; поэтому мы обратимся непосредственно к определяющему его уравнению (14).

а) Классическая механика

$$H(p)=\left(\sqrt{p}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2z}}\,e^{-z}\,dz\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi p}}, \tag{16}$$

отсюда

$$h(z)=\frac{1}{\sqrt{2z}}; \tag{17}$$

подстановка $h(z)$ в (13) дает хорошо известный результат.

б) Релятивистская механика.

Для $H(p)$ можно без труда получить асимптотическое разложение

$$H(p)=\left(\sqrt{2p}\int_0^\infty \frac{1+z/p}{\sqrt{1+z/2p}}\,\frac{e^{-z}dz}{\sqrt{z}}\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi p}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{p}\right)^n, \tag{18}$$

$$a_0=1,\quad a_1=-\frac{3}{8},\ \ldots$$

Подстановка $H(p)$ в уравнение (14) дает для $h(z)$ быстро сходящийся ряд

$$h(z)=\sum \frac{a_n z^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}, \tag{19}$$

откуда для изохронных колебаний ($\tau(\varepsilon)=\mathrm{const}$), согласно (13), получим

$$x(u)=\frac{\tau}{\pi}\sqrt{\frac{u}{2}}\left(1-\frac{u}{4}+\ldots\right), \tag{20}$$

и для энергии имеем:

$$u(x)=\frac{\omega^2x^2}{2}\left(1-\frac{\omega^2x^2}{4}+\ldots\right). \tag{21}$$

При больших энергиях u $g(u)\to 1$, и, как видно из уравнения (9), $x(u)\to\tau$; этот результат, впрочем, очевиден и из физических соображений.

5. Элементарный подсчет дает для потери энергии на излучение за один период величину

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim \left(\frac{r_e}{a}\right) \varepsilon^5,$$

где r_e — электромагнитный радиус частицы: $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$, а a—амплитуда колебаний. Таким образом, при амплитудах порядка метра учет излучения не является существенным вплоть до энергий ~ 100 MeV.

Физико-технический институт
Академии Наук УССР

Поступило
8 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. M. Skellett, J. Appl. Phys., **19**, 187 (1948). [2] Л. Ландау и Л. Пятигорский, Механика, 1940. [3] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, **2**, 1945.