Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА НА СЛУЧАЙ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ([1])

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 VII 1948)

Теорема. *Пусть* $\Phi(R_1+R_2,\ R_1\cdot R_2,\ \bar{n})$ — *трижды непрерывно дифференцируемая функция единичного вектора* $\bar{n}$ *и переменных* R_1, R_2, *определенная для всех* $\bar{n}$ *и* $R_1, R_2>0$, *удовлетворяющая условию*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R_1}\frac{\partial\Phi}{\partial R_2}>0. \qquad (1)$$

Если для каждой точки четырежды непрерывно дифференцируемой замкнутой поверхности положительной кривизны заданы значения $\varphi(\bar{n})$ *функции* $\Phi(R_1+R_2,\ R_1\cdot R_2,\ \bar{n})$, *когда* R_1 *и* R_2 — *главные радиусы кривизны поверхности, а* $\bar{n}$ — *единичный вектор нормали к ней, то поверхность определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.*

Доказательство. Пусть F и F_1 — две поверхности, для которых значения функции Φ совпадают, $H(x, y, z)$ и $H_1(x, y, z)$ — опорные функции этих поверхностей, $Z=H-H_1$. Как показал А. Д. Александров ([1]), d^2Z — либо знакопеременная форма, либо тождественно исчезает. Обозначим $\bar{\Omega}$ множество тех точек единичной сферы $x^2+y^2+z^2=1$, в которых $d^2Z\equiv 0$, Ω — дополнительное множество.

Могут представиться только три случая: a) Ω пусто, b) $\bar{\Omega}$ пусто, c) ни одно из множеств Ω, $\bar{\Omega}$ не пусто.

В предположении двукратной дифференцируемости поверхностей F и F_1 А. Д. Александров показал ([1]), что случай a) вообще исключается, в случае b) поверхности равны и параллельно расположены, в случае c) то же заключение, что и в b), но рассмотрение этого случая существенно опирается на аналитичность поверхностей F и F_1. В нашем рассмотрении случая c) используется только четырехкратная дифференцируемость поверхностей.

Так как $H(x, y, z)$ положительно однородная функция первой степени, то в полупространстве $z>0$ она может быть представлена в виде $zf\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$. Легко убедиться в том, что в выражениях вторых частных производных функции H функция f и ее частные производные первого порядка отсутствуют. Поэтому, если характеризовать положение точки на единичной сфере параметрами $\alpha=x/z$, $\beta=a/z$, то для функции f получаем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка вида

$$\Phi_1(r, s, t, \alpha, \beta)=\varphi_1(\alpha, \beta), \tag{2}$$

где r, s, t — вторые частные производные функции $f(\alpha, \beta)$. Этому уравнению удовлетворяет также функция $f_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{z} H_1(x, y, z)$.

Уравнение (2) эллиптического типа. Покажем это. Пусть $\overline{n}_0(\alpha_0, \beta_0)$ — произвольная точка единичной сферы. Выберем новую систему прямоугольных координат таким образом, чтобы ось z' проходила через точку $\overline{n}_0$, а оси x', y' направим так, чтобы $H'_{x'y'}(0, 0, 0)=0$, где $H'(x',y',z')$ — опорная функция поверхности F относительно новой системы координат. Так же как и ранее заключаем, что функция $f'(\alpha', \beta') = \frac{1}{z'} H'(x', y', z')$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\Phi_1'(r', s', t', \alpha', \beta')= \varphi_1'(\alpha', \beta'), \tag{2'}$$

которое получается из уравнения (2) заменой переменных и, следовательно, того же типа. Подсчетом для суммы и произведения главных кривизн поверхности F в окрестности точки $\alpha' = \beta' = 0$ получаем

$$R_1+R_2=r'+t'+\alpha'\psi_1+\beta'\psi_2,$$
$$R_1\cdot R_2=r't'-s'^2+\alpha'\psi_3+\beta'\psi_4,$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 — регулярные функции переменных $r', s', t', \alpha', \beta'$. Отсюда следует, что в точке $\alpha' = \beta' = 0$

$$\frac{\partial\Phi_1'}{\partial r'}\frac{\partial\Phi_1'}{\partial t'}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Phi_1'}{\partial s'}\right)^2=\frac{\partial\Phi}{\partial R_1}\frac{\partial\Phi}{\partial R_2}>0$$

Так как точка (α_0, β_0) была взята произвольно, то уравнение (2) всюду эллиптического типа.

Рассмотрим множество K точек евклидова пространства, координаты x, y, z которых соответственно равны $\partial Z/\partial x$, $\partial Z/\partial y$, $\partial Z/\partial z$. Множество K является замкнутым ограниченным и не сводится к одной точке, если Ω не пусто. Пусть $\overline{n}_1$ — точка единичной сферы, принадлежащая Ω. Построим сферу σ минимального радиуса, содержащую все точки множества K и точку $\lambda\overline{n}_1$, $\lambda<0$ и $|\lambda|$ достаточно велико. На этой сфере есть по крайней мере одна точка N_0 множества K, радиус-вектор которой равен $\operatorname{grad} Z(\overline{n}_0)$ где $\overline{n}_0$ — некоторая точка единичной сферы, очевидно, принадлежащая $\overline{\Omega}$.

Построим плоскость π, касательную к сфере σ в точке N_0. Можно считать, что вектор n_0 не перпендикулярен π. Ибо, если бы он был перпендикулярен π при каждом λ, то точка $-\overline{n}_1$ должна принадлежать $\overline{\Omega}$. Если бы это было для каждой точки $\overline{n}_1$, принадлежащей Ω, то множество $\overline{\Omega}$ содержало бы некоторую связную область G (так как Ω — область). Так как в каждой точке $\overline{n}$ области G $d^2Z\equiv 0$, то параллельным переносом поверхности F можно было бы добиться того, что для $\overline{n}$, принадлежащих G, $H_1=H$. Отсюда, в силу теоремы Карлемана о единственности решения задачи Коши для уравнений эллиптического типа, следовало бы $H_1\equiv H$, т. е. поверхности F_1 и F равны с точностью до параллельного переноса. Итак, можно считать, что вектор $\overline{n}_0$ не перпендикулярен π.

Не ограничивая общности, можно считать, что плоскость π является плоскостью xy, вектор $\overline{n}_0$ лежит в положительной единичной полусфере, точка N_0 находится в начале координат, множество K — в полупространстве $x \leqslant 0$.

Пусть α_0 и β_0 — координаты точки $\overline{n}_0$, $\overline{f}=f-f_1$. Имеем $\overline{f}_\alpha=\overline{f}_\beta=0$ при $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$. В остальных случаях $\overline{f}_\alpha \leqslant 0$. Действительно, если x, y, z — прямоугольные координаты точки $\overline{n}$, то координаты соответствующей точки множества K равны $\partial Z/\partial x=\overline{f}_\alpha$, $\partial Z/\partial y=\overline{f}_\beta$, $\partial Z/\partial z$. Итак, в точке $\overline{n}_0$ $d\overline{f}=0$.

Обе функции $f(\alpha, \beta)$ и $f_1(\alpha, \beta)$ удовлетворяют уравнению (2). Поэтому $\Phi_1(r, s, t, \alpha, \beta)-\Phi_1(r_1, s_1, t_1, \alpha, \beta)=0$. Согласно известной лемме Адамара, левая часть этого равенства может быть представлена в виде $A(r-r_1)+B(s-s_1)+C(t-t_1)$, где A, B, C — дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных r, r_1, s, s_1, t, t_1, α, β. Подставляя вместо $r, r_1, \ldots, t_1$ их выражения через α и β, замечаем, что функция $\overline{f}$ удовлетворяет уравнению в частных производных вида

$$\overline{A}\overline{r}+\overline{B}\overline{s}+\overline{C}\overline{t}=0. \tag{3}$$

В окрестности точки $\overline{n}_0$ это уравнение эллиптического типа, так как в точке $\overline{n}_0$ $A=\partial\Phi_1/\partial r$, $B=\partial\Phi_1/\partial s$, $C=\partial\Phi_1/\partial t$, а $\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\right)^2>0$ в силу эллиптичности уравнения (2).

Дифференцируя уравнение (3) по α для функции $\overline{p}(\alpha, \beta)=\overline{f}_\alpha$, получим уравнение

$$\overline{A}\overline{p}_{\alpha\alpha}+\overline{B}\overline{p}_{\alpha\beta}+\overline{C}\overline{p}_{\beta\beta}+\overline{D}\overline{p}_\alpha+\overline{E}\overline{p}_\beta=0. \tag{4}$$

Функция $\overline{p}(\alpha, \beta) \leqslant 0$. В точке $\overline{n}_0$ $\overline{p}=0$. Как известно, максимум решений эллиптических уравнений типа (4) достигается на границе области регулярности решения [2]. Поэтому найдутся сколь угодно близкие $\overline{n}_0$ точки $\overline{n}_k$, в которых $\overline{p}(\overline{n}_k)=0$. $\overline{p}(\overline{n})$ есть координата x одной из точек множества K. Единственная точка из K, для которой $x=0$, есть начало координат. Следовательно, в точках $\overline{n}_k$ $\overline{q}(\overline{n}_k)=\overline{f}_\beta(\overline{n}_k)=0$. Итак, существует последовательность точек $\overline{n}_k$, сходящаяся к $\overline{n}_0$, такая, что $d\overline{f}(\overline{n}_k)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Вернемся к уравнению (3). Так как коэффициенты этого уравнения дважды непрерывно дифференцируемы, то в окрестности точки $\overline{n}_0$ оно может быть приведено к нормальному виду $\tilde{r}+\tilde{t}=\lambda\tilde{p}+\mu\tilde{q}$. Это уравнение равносильно системе

$$\tilde{p}_\alpha+\tilde{q}_\beta=\lambda\tilde{p}+\mu\tilde{q}, \quad \tilde{p}_\beta-\tilde{q}_\alpha=0.$$

Так как при замене координат свойство первого дифференциала обращаться в нуль сохраняется, то в точках $\overline{n}_k$ $\tilde{p}=\tilde{q}=0$. По известной теореме Карлемана [3], $\tilde{p}=\tilde{q}\equiv 0$ в окрестности точки $\overline{n}_0$. Отсюда следует, что в окрестности точки $\overline{n}_0$ $d^2Z\equiv 0$. Но, как было показано выше, при этом $d^2Z\equiv 0$ всюду, что значит, что поверхности F_1 и F равны и параллельно расположены.

Поступило
1 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, 22, № 3 (1939). [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945. [3] T. Carleman, C. R., 197, № 7, 471 (1933).