Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. Н. МЕЙМАН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 VII 1948)

§ 1. В заметках ([1], [2]) я рассматривал проблему Гурвица для целых функций, состоящую в определении условий того, что целая функция имеет только конечное число нулей в нижней полуплоскости, и в определении числа таких корней. В указанных заметках был выделен наиболее простой и вместе с тем самый важный в этой проблеме класс целых функций — класс B. Этот класс, в частности, вполне характеризуется тем, что для него справедлива теорема Эрмита — Билера ([1], [2]). В настоящей заметке мы изучаем ряд свойств функций класса B.

§ 2. Всякий раз, когда целая функция $F(z)$ записывается в виде

$$F(z)=g(z)+ih(z),$$

предполагается, что $g(z)$ и $h(z)$ — целые функции, вещественные вдоль вещественной оси. Функции $g(z)$ и $h(z)$ будем называть компонентами функций $F(z)$. Чтобы не усложнять формулировки и определений, будем считать, что компоненты $g(z)$ и $h(z)$ не имеют общих нулей.

Определения. 1. Целая функция $F(z)$ называется функцией класса B, если мероморфная функция

$$\zeta(z)=\frac{g(z)+ih(z)}{g(z)-ih(z)}$$

ограничена в верхней полуплоскости для достаточно больших по модулю z. Из теоремы Фрагмена — Линделефа следует, что для любого $\eta>0$ $|\zeta(z)|<1+\eta$ при $|z|>R(\eta)$, $\operatorname{Im} z>0$.

2. Целая функция $F(z)$ принадлежит классу H, если $F(z)$ не имеет нулей в нижней полуплоскости.

3. Пересечение классов H и B называется классом HB.

4. Пусть точка z_0 ($\operatorname{Im} z_0\geqslant 0$) является корнем кратности k уравнения

$$\frac{h(z)}{g(z)}=a,$$

где a — некоторое вещественное число (∞ не исключается). Верхнюю кратность точки z_0 полагаем равной k, если $\operatorname{Im} z_0>0$; равной $k/2$, если $z_0=x_0$ вещественно и k — четное число; равной $(k-1)/2$, если k нечетно и $\arg[g(x)+ih(x)]$ возрастает вдоль вещественной оси в точке $z_0=x_0$, и равной $(k+1)/2$, если $\arg[g(x)+ih(x)]$ убывает в этой точке. При $k=1$ возрастание и убывание $\arg[g(x)+ih(x)]$ равносильны неравенствам

$$h'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)h(x_0)>0, \quad h'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)h(x_0)<0.$$

5. Сумма верхних кратностей всех корней уравнения $h(z)/g(z)=a$ при фиксированном a обозначаем символом $S_a(h, g)$.

Заметим, что равенства $S_0(h, g)=S_a(h, g)=0$ означают, что все корни компонент $h(z)$ и $g(z)$ вещественны, просты, перемежаются друг с другом и во всех этих точках

$$h'(x)g(x)-g'(x)h(x)>0.$$

Из результатов заметки (2) следует теорема.

Теорема 1. *Символ $S_a(h, g)$ для всех значений a, за исключением, быть может, двух значений, имеет одно и то же типовое значение $S(h, g)$, причем исключительные значения меньше типового. Если имеются два исключительных значения, то типовое значение $S(h, g)=\infty$ и число корней $F(z)$ в нижней полуплоскости равно $S(h, g)=\infty$.*

Необходимое и достаточное условие принадлежности функции $F(z)$ классу B состоит в ограниченности типового значения $S(h, g)<\infty$. В этом случае может быть только одно исключительное значение $S_a<S$, и число корней функции $F(z)$ в нижней полуплоскости равно типовому значению S.

Обозначим через M множество точек верхней полуплоскости, в которых $|\zeta(z)|=\left|\frac{g(z)+ih(z)}{g(z)-ih(z)}\right|>1$ и через N — образ множества M на римановой поверхности функции $z=z(\zeta)$, обратной функции $\zeta(z)$. Множество N расположено над областью $|\zeta|>1$ и число листов, на которых оно расположено, равно типовому значению $S(h, g)$. Если на каком-нибудь листе точка $\zeta=\infty$ не является внутренней точкой множества N, то в соответствующей компоненте множества M имеется путь, уходящий на бесконечность, вдоль которого $\zeta(z)$ стремится к ∞, или, что то же самое, $h(z)/g(z)$ стремится к $-i$.

Теорема 2. *Если функция $F(z)$ имеет в нижней полуплоскости конечное число нулей, то $F(z)\in B$, если $-i$ не является асимптотическим значением функции $h(z)/g(z)$, и не принадлежит классу B в противном случае.*

Пусть $F(z)=g(z)+ih(z)\in B$. Число компонент множества M не превосходит типового значения $S(h, g)$ (см. (2)).

Если множество, дополнительное к множеству M относительно верхней полуплоскости, связное, то любые две точки верхней полуплоскости можно соединить такой кривой, что приращение $\arg\frac{h(z)}{g(z)}$ вдоль этой кривой по абсолютной величине меньше 2π. Если дополнительное множество становится связным при добавлении r компонент множества M, то величину 2π нужно заменить величиной $(2+r)\pi$.

Теорема 3. *Если $F(z)\in B$, то существует такая константа $C(F)$, что две любые точки верхней полуплоскости можно соединить такой непрерывной кривой, что приращение $\arg\frac{h(z)}{g(z)}$ вдоль этой кривой по абсолютной величине меньше $C(F)$.*

Теорема 4. *Необходимое и достаточное условие принадлежности целой функции $F(z)=g(z)+ih(z)$ классу B состоит в том, что ее компоненты $g(z)$ и $h(z)$ имеют следующую структуру:*

$$g(z)=R(z)\,e^{u(z)}\prod_{\nu}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)e^{P_\nu(z/a_\nu)}=R(z)\,g_1(z),$$

$$h(z)=T(z)\,e^{v(z)}\prod_{\nu}\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)e^{P_\nu(z/b_\nu)}=T(z)\,h_1(z),$$

где $R(z)$ и $T(z)$ — полиномы с вещественными коэффициентами, со старшими коэффициентами одного и того же знака и степени которых одной и той же четности; нули a_ν и b_ν функций $g_1(z)$ и $h_1(z)$ вещественны, просты и перемежаются; выполняется тождество

$$u(z)-v(z)+\sum_{\nu}\left[P_\nu\left(\frac{z}{a_\nu}\right)-P_\nu\left(\frac{z}{b_\nu}\right)\right]\equiv \mathrm{const}$$

и хотя бы в одной точке вещественной оси

$$h_1'(x)\,g_1(x)-g_1'(x)\,h_1(x)>0;$$

$u(z)$ и $v(z)$ вещественные целые функции, P_ν — показатели Вейерштрасса.

Доказательство опирается на вторую часть теоремы 1, теорему 3 и неравенство Каратеодори для функций, имеющих во всей полуплоскости мнимую часть одного и того же знака.

Примечание. Теорема 5 заметки ([1]) о необходимом и достаточном условии принадлежности функции $F(z)=g(z)+ih(z)$ классу HB получится из теоремы 2, если положить $R(z)=\mathrm{const}$, $T(z)=\mathrm{const}$.

§ 3. В основе различных алгоритмических методов определения числа корней полинома в данной полуплоскости (в нашем случае нижней) I. Schur'a ([3]), M. Benjaminowitsch'a ([4]) и Ю. И. Неймарка ([5]) лежит тот факт, что полиномы $f(z)$ и $f(z)+\lambda\overline{f}(z)$ * имеют в нижней полуплоскости при λ, удовлетворяющем неравенству $|\lambda|<1$, одно и то же число корней. Оказывается, что целые функции класса B тоже обладают этим свойством и, более того, характеризуются этим свойством.

Теорема 5. *Пусть функция $F(z)=g(z)+ih(z)\in B$; тогда преобразованная функция*

$$TF(z)=[\alpha g(z)+\beta h(z)]+i\,[\gamma g(z)+\delta h(z)],$$

где α, β, γ, δ — вещественные константы, удовлетворяющие неравенству

$$\alpha\delta-\beta\gamma>0,$$

тоже принадлежит классу B и имеет в нижней полуплоскости то же число нулей, что и $F(z)$.

Доказательство. Функция

$$TF(z)=g_1(z)+ih_1(z),$$

где

$$g_1(z)=\alpha g(z)+\beta h(z),\quad h_1(z)=\gamma g(z)+\delta h(z).$$

Следовательно,

$$h_1'(x)\,g_1(x)-g_1'(x)\,h_1(x)=(\alpha\delta-\beta\gamma)\,[h'(x)\,g(x)-g'(x)\,h(x)].$$

---

* Если $f(z)=u(z)+iv(z)$, то под $\overline{f}(z)$ понимается $u(z)-iv(z)$, а не $\overline{u(z)+iv(z)}=\overline{f}(\overline{z})$.

Из определения символа S следует, что

$$S_a(h, g) = S_{\frac{\gamma+\delta a}{\alpha+\beta a}}(h_1, g_1),$$

поэтому типовые значения $S(h, g)$ и $S(h_1, g_1)$ совпадают, что и доказывает теорему *.

Теорема 6. *Если для трех систем величин $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, удовлетворяющих неравенству $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, функция $TF(z)$ имеет в нижней полуплоскости конечное число нулей, то $F(z) \in B$.*

Доказательство. Обратное преобразование T^{-1} имеет определитель того же знака, что и T, поэтому, если одна из преобразованных функций $T_1F(z)$, $T_2F(z)$, $T_3F(z)$ принадлежит классу B, то, согласно предыдущей теореме, $F(z) \in B$. Пусть все три функции $TF(z) \overline{\in} B$. Согласно теореме 2, в верхней полуплоскости существуют пути Γ_1 и Γ_2, вдоль которых

$$\frac{\gamma_k g(z) + \delta_k h(z)}{\alpha_k g(z) + \beta_k h(z)} \to -i \quad (k = 1, 2).$$

Согласно известной теореме Иверсена, в области верхней полуплоскости, ограниченной Γ_1 и Γ_2, функция $h(z)/g(z)$ принимает все значения, за исключением, быть может, двух, бесчисленное число раз. Это противоречит условию теоремы, согласно которому существуют три исключительные значения.

Из теорем 5 и 6 следует, что класс B можно определить как класс функций с конечным числом нулей в нижней полуплоскости, инвариантный относительно группы преобразований с положительным определителем.

Примечание. Пусть t — произвольное фиксированное комплексное число с положительной мнимою частью. Функция $\zeta(z)$ удовлетворяет неравенству $|\zeta(z)| < 1 + \eta$ при $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > R(\eta)$. Величину η можно выбрать настолько малой, что в этой области $g(z)/h(z)$ не принимает значений, лежащих в круге радиуса ε с центром в точке t. Отсюда следует ограниченность в этой области функции

$$\zeta_t(z) = \frac{g(z) + th(z)}{g(z) - th(z)}.$$

Пусть B_t определяется как класс функций, для которых $\zeta_t(z)$ ограничена при достаточно больших z в верхней полуплоскости. Тогда $B_t \subseteq B$. Очевидно, справедливо и обратное неравенство $B \subseteq B_t$, т. е. классы B и B_t совпадают. В этом и заключается первая часть теоремы 5.

Институт физических проблем
Академии Наук СССР

Поступило
9 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Мейман, ДАН, 40, 55 (1943). [2] Н. Мейман, ДАН, 40, 200 (1943). [3] I. Schur, ZAMM, 1 (1921). [4] M. Benjaminowitsch, Mat. Z., 36 (1933). [5] Ю. И. Неймарк, ДАН, 58, № 3 (1947). [6] Н. Г. Чеботарев ДАН, 35, 251 (1942).

* Н. Г. Чеботарев ([6]) ввел класс *WW*, совпадающий с классом *HB*, определяя его требованием, что, наряду с $F(z)$, функция $F_\varepsilon(z) = g(z) + i(1+\varepsilon)h(z)$ при всех достаточно малых по модулю ε не имеет нулей в нижней полуплоскости.