Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 3

МАТЕМАТИКА

И. П. МАКАРОВ

НОВЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 VII 1948)

Рассматривая систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

введем следующие определения.

Определение 1. Движение, соответствующее решению системы

$$x_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

есть невозмущенное движение

Определение 2. Движения, соответствующие всем остальным решениям системы, суть возмущенные движения.

Определение 3. Невозмущенное движение системы устойчиво по Ляпунову, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно найти положительное число η такое, что, если начальные значения $x_k^{(1)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ величин x_k $(k = 1, 2, \ldots)$, соответствующие $t = t_1$, набрать согласно условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(1)}| \leqslant \eta$, то при всех $t > t_1$ будет выполняться условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$ *.

Определение 4. Невозмущенное движение системы асимптотически устойчиво по Ляпунову, если при выполнении условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(1)}| \leqslant \eta$ выполняется условие $\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| = 0$.

Будем полагать, что коэффициенты системы суть некоторые непрерывные функции времени t, удовлетворяющие, начиная с некоторого момента времени $t_1 \geqslant 1$, при всех $t > t_1$ условиям А **:

* Легко убедиться, что решение рассматриваемой системы, заданное определенными начальными условиями, единственно.

** Отметим при этом, что условия А не требуют ограниченности модулей функций $|p_{ii}(t)|$ и $|p_{ii}(t) - p_{ss}(t)|$ при возрастании t до ∞.

$$1)\ p_{ii}(t) \leqslant p_{ii}(t_1) < 0;$$

$$| p_{ii}(t) | > | p_{ss}(t) |, \quad \text{где } s > i;$$

$$| p_{ii}(t) - p_{ss}(t) | \geqslant | p_{ii}(t_1) - p_{ss}(t_1) | > 0, \text{ где } s \neq i.$$

2) Если $i > k$, то

$$p_{ik}(t) \leqslant \frac{e^{\alpha_{ik}(t-t_1)}}{t^{1+\beta_{ik}}},$$

где $\alpha_{ik} \leqslant | p_{ii}(t_1) - p_{kk}(t_1) |$, β_{ik} — положительные числа такие, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-2}}{\beta_{ik}}$ сходится для всякого i и сумма любого из этих рядов не превышает некоторого числа M.

3) Если $i < k$, то $p_{ik}(t) \equiv 0$.

Лемма 1. *Если коэффициенты системы удовлетворяют условиям А, то функции*

$$\varphi_s(t) = e^{\int\limits_{t_1}^{t} p_{ss}(t)\, dt}$$

$$\chi_s^{(i)}(t) = \int\limits_{t_1}^{t} p_{si}(t) e^{\int\limits_{t_1}^{t} [p_{ii}(t) - p_{ss}(t)]\, dt} dt,$$

где $t > t_1$ и $i < s$, удовлетворяют неравенствам

$$| \varphi_s(t) | < 1, \qquad | \chi_s^{(i)}(t) | \leqslant \frac{1}{\beta_{si}}.$$

Справедливость леммы легко устанавливается рассмотрением оценок, даваемых условиями А.

Лемма 2. *Если решения системы удовлетворяют при $t = t_1$ начальным условиям: $x_{ik}^{(1)} = 1$ при $i = k$, $x_{ik}^{(1)} = 0$ при $i \neq k$, то модули элементов матрицы решений удовлетворяют при $t > t_1$ условиям:*

$$| x_{ks} | \leqslant \frac{2^{s-2}}{(\beta_{si})^{s-1}} \quad \text{при } k < s;$$

$$| x_{ks} | < 1 \quad \text{при } k = s;$$

$$| x_{ks} | \equiv 0 \quad \text{при } k > s.$$

Для доказательства леммы заметим, что k-я строка матрицы решений системы, удовлетворяющих предусмотренным леммой начальным условиям, может быть представлена в общем виде следующими формулами:

$$x_{k1} = x_{k2} = \ldots = x_{k,\,k-1} = 0, \qquad x_{kk} = e^{\int\limits_{t_1}^{t} p_{kk}(t)\, dt},$$

$$x_{ks} = e^{\int\limits_{t_1}^{t} p_{ss}(t)\, dt} \int\limits_{t_1}^{t} \sum_{i=k}^{s-1} p_{si}(t) x_{ki} e^{-\int\limits_{t_1}^{t} p_{ss}(t)\, dt} dt, \qquad s = k+1,\ k+2, \ldots$$

Из этих формул непосредственно следует справедливость последнего утверждения леммы ($|x_{ks}| \equiv 0$ при $k > s$). Справедливость того, что $|x_{ks}| < 1$ при $k = s$, следует из леммы 1, так как $|x_{kk}| = |\varphi_k(t)|$. Для оценки модулей всех остальных элементов k-й строки матрицы решений для случаев, когда $k<s$, представим x_{ks} в виде суммы символических произведений

$$x_{ks}=\varphi_s\sum_{l=k}^{s-1}\chi_s^{(l)}\frac{x_{kl}}{\varphi_l},$$

где φ_s и $\chi_s^{(l)}$ имеют те же значения, что и в лемме 1, приняв во внимание, что $x_{kk}/\varphi_k=1$ и что каждое символическое произведение раскрывается как повторные интегралы, например:

$$\chi_s^{(s-1)}\chi_{(s-1)}^{(s-2)}=$$

$$=\int_{t_1}^{t}p_{s,s-1}e^{\int_{t_1}^{t}(p_{s-1,s-1}-p_{ss})dt}\int_{t_1}^{t}p_{s-1,s-2}e^{\int_{t_1}^{t}(p_{s-2,s-2}-p_{s-1,s-1})dt}dt\,dt.$$

Число слагаемых под знаком суммы после ее раскрытия, очевидно, равно 2^{s-2} (но не менее одного), а число символических сомножителей в каждом слагаемом не превышает $s-k$. Это значит, на основании леммы 1, что

$$|x_{ks}|=\left|\varphi_s\sum_{l=k}^{s-1}\chi_s^{(l)}\frac{x_{kl}}{\varphi_l}\right|\leqslant 2^{s-2}\frac{1}{(\beta_{is})^{s-1}}.$$

Теорема 1. *Для асимптотической устойчивости невозмущенного движения системы достаточно выполнения условий А, налагаемых на коэффициенты.*

Доказательство. Положим, что число ε (см. определение 3) задано. Зададим постоянные C_k так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|C_k|\leqslant\eta$, где $\eta=\varepsilon\Big/\left(1+\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{2^{s-2}}{(\beta_{is})^{s-1}}\right)$, и образуем общее решение $x_k=\sum\limits_{i=1}^{\infty}C_ix_{ki}$, где на матрицу $\|x_{ki}\|$ наложим условия леммы 2. Тогда при $t=t_1$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k^{(1)}|\leqslant\eta$, а при $t>t_1$ будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|C_1x_{1k}+C_2x_{2k}+\ldots+C_{k-1}x_{k-1,k}+C_kx_{kk}|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2^{k-2}}{(\beta_{ik})^{k-1}}[|C_1|+|C_2|+\ldots+|C_{k-1}|]+|C_k|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-2}}{(\beta_{ik})^{k-1}}\eta+\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|\leqslant\eta\left\{1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2^{s-2}}{(\beta_{is})^{s-1}}\right\}=\varepsilon.$$

Этим доказана устойчивость невозмущенного движения системы. Асимптотичность же этой устойчивости легко усматривается из выражения для x_{ks}, приведенного в лемме 2, $x_{ks}=\varphi_s\sum\limits_{l=k}^{s-1}\chi_k^{(l)}\frac{x_{kl}}{\varphi_l}$, в котором $\sum\limits_{l=k}^{s-1}\chi_s^{(l)}\frac{x_{kl}}{\varphi_l}$, как это было доказано, ограничена, а $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_s=0$, что очевидно из выражения для φ_s, данного в лемме 1, если при этом принять во внимание, что $p_{ss}(t)<0$ и что число слагаемых, не равных нулю, образующих x_k, для любого k конечно.

Теорема 2. *Невозмущенное движение системы неустойчиво по Ляпунову, если при выполнении условий А для коэффициентов матрицы в случаях $i=k$ и $i<k$ порядок роста модулей коэффициентов, соответствующих случаю $i>k$, превышает порядок роста функции* $e^{\int\limits_{t_1}^{t}|p_{ii}(t)|dt}$.

Доказательство. Если условия теоремы выполнены, то, например,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{p_{k+1,k}(t)}{e^{\int\limits_{t_1}^{t}|p_{kk}(t)|dt}}=\lim_{t\to\infty}p_{k+1,k}(t)\,e^{\int\limits_{t_1}^{t}p_{kk}(t)\,dt}=\pm\infty,$$

где знак зависит от знака $p_{k+1,k}$, а это значит, что, вводя обозначения леммы 2, получим:

$$\lim_{t\to\infty}x_{k,k+1}=\lim\varphi_{k+1}\chi_{k+1}^{(k)}=\pm\infty.$$

Неограниченность же хотя бы одной из функций k-й строки матрицы решений уже достаточна для того, чтобы невозмущенное движение системы оказалось неустойчивым, так как при соответствующем подборе произвольных постоянных (например $C_{k+1}\leqslant\eta$; $C_1=C_2=\ldots$ $\ldots=C_k=C_{k+2}=\ldots=0$) это приведет к неограниченности одной из функций, образующих общее решение системы.

Применяя те же рассуждения для частного случая постоянных коэффициентов системы, можно сформулировать условия А так: если $i=k$, то $p_{ii}<0$, $|p_{ii}|>|p_{ss}|$, где $s>i$*; если $i>k$, то

$$\left|\frac{p_{ik}}{p_{kk}-p_{ii}}\right|\leqslant\frac{1}{\beta_{ik}},$$

где β_{ik} такие положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-2}}{\beta_{ik}}$ сходится для каждого i и сумма любого из этих рядов не превышает некоторого числа M; если $i<k$, то $p_{ik}=0$.

Приношу глубокую благодарность проф. В. В. Немыцкому за предоставление темы работы и руководство.

Поступило
28 VI 1948

---

* Сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ii}$ при этом не требуется.