Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. А. ГЛАГОЛЕВ

НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ВУРФОВ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 23 VII 1948)

Обычная синтетическая теория тетраэдрального комплекса сложилась в основном в то время, когда понятие об обобщенных или многоэлементных вурфах еще не было введено в науку.

Между тем, свойства обобщенных вурфов приводят не только к более простой синтетической теории тетраэдрального комплекса, но позволяют распространить последнюю и на случай n-мерного пространства, что и осуществляется ниже.

Определение T-системы. Будем называть T-системой ∞^n прямых x пространства S_n $(n \geqslant 3)$, на каждой из которых находится по такой точке X, что вурф $n+2$ лучей XA_1, $XA_2, \ldots, XA_{n+1}$, Xx, где $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — вершины некоторого симплекса, имеет заданное значение.

Теорема 1. *Лучи T-системы, инцидентные с произвольной точкой M пространства S_n, образуют нормальный конус $(n-1)$-го порядка, проходящий через вершины симплекса $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$.*

Доказательство. Согласно определению T-системы, если принадлежащий ей луч x проходит через точку M, то на луче x лежит такая точка X, что вурф $(XA_1, XA_2, \ldots, XA_{n+1}, Xx)$ имеет заданное значение.

Но, если точка X будет перемещаться в пространстве S_n таким образом, что вурф $(XA_1, XA_2, \ldots, XA_{n+1}, XM)$ сохраняет постоянное значение, то, как это непосредственно вытекает из самого определения обобщенного вурфа, точка X опишет нормальную кривую пространства S_n, проходящую через $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ и проектирующуюся из M нормальным конусом $(n-1)$-го порядка, что и доказывает теорему.

Из теоремы 1 непосредственно видно, что при $n=3$ T-система будет тетраэдральным комплексом, и, следовательно, при $n=3$ приведенное выше определение будет новым определением этого комплекса.

Теорема 2. *T-система состоит из всех прямых, пересекающих $n+1$ граней симплекса $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ в $n+1$ точках, сохраняющих один и тот же $(n+1)$-элементный вурф W_{n+1}.*

Доказательство. Пусть прямая x пересекает грани симплекса $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, противоположные вершинам $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, соответственно в точках $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1}$ и пусть $(n+1)$-элементный вурф $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1})$ имеет заданное значение W_{n+1}.

Если X — произвольная точка прямой x, отличная от точек $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1}$, то, согласно обобщенной теореме Штаудта, вурф $n+2$ точек $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1}$, X, лежащих на прямой x, равен вурфу $n+2$ лучей $XA_1, XA_2, \ldots, XA_{n+1}$, Xx, проходящих через точку X.

Но это означает, что совокупность прямых, о которых идет речь в теореме 2, есть T-система, определяемая при помощи указанного выше вурфа W_{n+2} и симплекса $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, что и доказывает теорему.

Теорема 3. *Существует* ∞^1 *вурфов* W_{n+2} *с одинаковым подвурфом* W_{n+1}, *определяющих вместе с данным симплексом* $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ *одну и ту же T-систему.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 2 точка X была произвольно взята на прямой x, а потому существует ∞^1 вурфов W_{n+2} с одинаковым подвурфом W_{n+1}, определяющих вместе с симплексом $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ одну и ту же T-систему.

Теорема 4. *T-система состоит из всех прямых, проектирующих вершины симплекса* $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ $n+1$ *плоскостями, сохраняющими один и тот же* $(n+1)$*-элементный вурф* W_{n+1}.

Доказательство. Согласно обобщенной теореме Штаудта, вурф $n+1$ плоскостей, соединяющих прямую x с вершинами симплекса $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, равен вурфу $n+1$ точек, в которых прямая x пересекает грани симплекса $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, что в соединении с теоремой 2 и доказывает справедливость теоремы 4.

Теорема 5. *T-система состоит из всех прямых, соединяющих соответствующие точки в коллинеации, установленной между точками пространства* S_n.

Доказательство. Пусть X, X' — пара соответствующих точек, а $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — двойные точки коллинеации, установленной между точками S_n.

Тогда вурф $n+2$ лучей XA_1, $XA_2, \ldots, XA_{n+1}$, XX' как подвурф вурфа коллинеации $(A_1A_2 \ldots A_{n+1} XX')$ будет сохранять постоянное значение, что и доказывает теорему.

Из теорем 3 и 5 непосредственно вытекает существование в S_n ∞^1 коллинеаций, определяющих одну и ту же T-систему.

Теорема 6. *T-система состоит из всех прямых, соединяющих точки гиперплоскости* S_{n-1} *с точками соответствующих лучей коллинеарной связки O.*

Доказательство. Пусть Y, Y' — пара соответствующих точек, а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — двойные точки коллинеации, установленной в S_{n-1} при помощи связки O. Пусть, далее, прямая YX соединяет точку Y с какой-либо точкой X соответствующего луча OY'.

Тогда вурф коллинеации $(A_1A_2 \ldots A_nYY')$ будет равен вурфу $n+2$ лучей XA_1, $XA_2, \ldots, XY$, XO, что и доказывает теорему.

Теорема 7. *T-система состоит из всех прямых, пересекающих соответственные лучи двух проективных связок* $(n-2)$*-го измерения.*

Доказательство. Проективные связки с центрами в A_n и A_{n+1}, лежащие соответственно в гиперплоскостях S_{n-1} и S'_{n-1}, определяют в S_{n-2} (пространстве пересечения S_{n-1} и S'_{n-1}) некоторую коллинеацию с двойными точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$.

Если X, X' — пара соответствующих точек последней коллинеации, а x — произвольная прямая, пересекающая A_nX и $A_{n+1}X'$, то вурф коллинеации $(A_1A_2 \ldots A_{n-1}XX')$ равен вурфу $x(A_1A_2 \ldots A_{n-1}XX')$, что в соединении с теоремой 4 и доказывает теорему 7.

Лемма. *На всех нормальных кривых* C^n *пространства* S_n $(n \geqslant 3)$, *проходящих через вершины симплекса* $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ *и дважды пересекающих прямую* l, *вурф* $(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$ *постоянен.*

Доказательство. Пусть M и O — точки пересечения прямой l с какой-либо кривой C^n, проходящей через $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Проектируя из O кривую C^n в гиперплоскость S_{n-1}, определяемую точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$, мы получим в S_{n-1} нормальную кривую C^{n-1}, определяемую точками $A_1, A_2, \dots, A_n, A'_{n+1}, M'$, где A'_{n+1} и M' — точки пересечения S_{n-1} с прямыми OA_{n+1} и $OM \equiv l$.

Так как $M'A'_{n+1}$ — прямая пересечения S_{n-1} с плоскостью OMA_{n+1}, то $(A_1A_2\dots A_{n+1}) = (A_1A_2\dots A_nA'_{n+1}) = (M'A_1, M'A_2, \dots, M'A_n, M'A_{n+1}) =$ $= \text{const}$, что и доказывает лемму.

Из определения T-системы, доказанной леммы и теоремы 3 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 8. *T-система состоит из всех хорд и касательных нормальных кривых пространства S_n, проходящих через вершины данного симплекса и дважды пересекающих данную прямую.*

Если в теоремах 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 положить $n = 3$, то мы получим основные теоремы относительно тетраэдрального комплекса, которые, в данном случае, естественно будут вытекать из свойств пяти- и шести-элементных вурфов, подобно тому как доказанные выше естественно вытекали из свойств $(n+1)$- и $(n+2)$-элементных вурфов

Поступило
23 VII 1948