МАТЕМАТИКА

УДК 519.21 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_39
EDN: LHIIYJ

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ПОТОКОВ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ В УЗЛАХ

Н.Н. Бородин[1], Ю.В. Малинковский[2]

[1]*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

EXPONENTIAL QUEUEING NETWORKS WITH COUNTABLE SET OF FLOWS OF NEGATIVE CUSTOMERS AND LIMITED SOJOURN TIME

N.N. Borodin[1], Yu.V. Malinkovsky[2]

[1]*Sukhoi State Technical University of Gomel*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания с N однолинейными узлами. В сеть поступает пуассоновский поток запросов с параметром Λ и счетное число пуассоновских потоков отрицательных заявок с параметрами λ_l, $(l=\overline{1,\infty})$ соответственно. Входящий запрос с вероятностью p_i, а отрицательная заявка l-го потока с вероятностью q_{il} направляются в i-й узел $\left(\sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} q_{il} = 1,\ l=\overline{1,\infty}\right)$. Отрицательные заявки не обслуживаются. Заявка l-го потока при поступлении в i-й узел сразу удаляет ровно l запросов (при их наличии), и удаляет все запросы, если их число меньше l, $i=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,\infty}$. Время пребывания запросов в узлах сети является случайной величиной, условное распределение которого при фиксированном числе запросов является показательным. Запросы, обслуженные в узлах, и запросы, покидающие узлы из-за завершения времени пребывания, могут оставаться запросами, становиться заявками l-го потока или покидать сеть.

Ключевые слова: *сеть*, *отрицательная заявка*, *ограниченное время пребывания*, *стационарное распределение.*

Для цитирования: *Бородин*, *Н.Н.* Экспоненциальные сети обслуживания со счетным числом потоков отрицательных заявок и ограничением на время пребывания в узлах / Н.Н. Бородин, Ю.В. Малинковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 39–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_39. – EDN: LHIIYJ

Abstract. An exponential queuing network with one-line nodes is considered. The network receives a Poisson flow of requests with a parameter Λ and a countable number of Poisson flows of negative customers with parameters λ_l, $(l=\overline{1,\infty})$, respectively. The incoming request with probability p_i and the negative customer of the l-th flow with probability q_{il} are sent to the i-th node $\left(\sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} q_{il} = 1,\ l=\overline{1,\infty}\right)$. Negative customers are not served. The customer of the l-th flow arriving at the i-th node, immediately deletes exactly l requests (if there are any), and deletes all the requests if their number is less than l, $i=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,\infty}$. The sojourn time of requests in network nodes is a random variable with exponential conditional distribution for a fixed number of requests. The requests served at nodes and the requests leaving nodes for the sojourn time is over can remain requests, become customers of the i-th flow, or leave the network.

Keywords: *network*, *negative customer*, *limited sojourn time*, *stationary distribution.*

For citation: *Borodin*, *N.N.* Exponential queueing networks with countable set of flows of negative customers and limited sojourn time / N.N. Borodin, Yu.V. Malinkovskii // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 39–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_39 (in Russian). – EDN: LHIIYJ

1 Постановка задачи

Сеть массового обслуживания (СеМО) с конечным числом потоков отрицательных заявок исследована в статье [1]. В данной работе результаты [1] обобщаются на случай счетного числа потоков отрицательных заявок.

Исследуется СеМО, состоящая из N экспоненциальных узлов с единственным прибором обслуживания. Интенсивность обслуживания прибором i-го узла равна μ_i, $i=\overline{1,N}$. В сеть извне поступают независимые пуассоновские потоки запросов и отрицательных заявок. При этом в i-й узел поступает поток запросов (запросы требуют обслуживания) с параметром Λp_i и счетное число потоков отрицательных заявок с параметрами $\lambda_l q_{il}$ соответственно

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N} q_{kl} = 1, \ l = \overline{1,\infty}, \ i = \overline{1,N}.$$

Заявки не требуют обслуживания. При поступлении заявки l-го потока в i-й узел она удаляет ровно l запросов (если таковые имеются) и удаляет все запросы, если их количество меньше l, $i = \overline{1,N}$, $l = \overline{1,\infty}$. После чего она исчезает не оказывая дальнейшего влияния. Время пребывания запроса в i-ом узле является случайной величиной. Условное распределение времени пребывания показательное с параметром $\frac{\upsilon_i}{n_i}$ (n_i – число запросов в узле). При поступлении в пустой узел запрос сразу начинает обслуживаться. Заметим, что с интенсивностью υ_i покидает узел даже не закончив обслуживание. Число мест в очереди для запросов в узлах сети бесконечно. Предполагается, что запросы обслуживаются в узлах в порядке их поступления (FCFS). Запрос после обслуживания в i-ом узле попадает в j-й узел не меняя своего статуса запроса с вероятностью p_{ij}^{+}, с вероятностью p_{ijl}^{-} становится заявкой l-го потока отрицательных заявок и с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($i, \ j = \overline{1,N}, \ l = \overline{1,\infty}$). Требуем выполнения условий:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(p_{ij}^{+} + \sum_{l=1}^{\infty} p_{ijl}^{-}\right) + p_{i0} = 1, \quad i = \overline{1,N}.$$

Запрос не получивший обслуживание из за окончания времени пребывания в i-ом узле, направляется в j-й узел не меняя своего статуса запроса с вероятностью r_{ij}^{+}, с вероятностью r_{ijl}^{-} становится заявкой l-го потока отрицательных заявок и с вероятностью r_{i0} покидает сеть ($i, \ j = \overline{1,N}, \ l = \overline{1,\infty}$). Требуем выполнения условий:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(r_{ij}^{+} + \sum_{l=1}^{\infty} r_{ijl}^{-}\right) + r_{i0} = 1, \ i = \overline{1,N}.$$

Рассмотрим случайный вектор

$$\vec{n}(t) = (n_1(t), \ n_2(t), \ \ldots, n_N(t)),$$

где $n_i(t)$ – число запросов в i-ом узле в момент времени t. Исходя из всех предположений, $\vec{n}(t)$ – многомерная цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $X = Z_{+}^{N}$, где $Z_{+} = \{0, \ 1, \ \ldots\}$.

Цель данной работы – установить условия эргодичности процесса $\vec{n}(t)$ и определить его финальное распределение.

2 Основной результат

Рассмотрим i-ый узел сети. Поместим его в фиктивную среду с пуассоновскими входящими потоками запросов и отрицательных заявок и теми же интенсивностями, что и потоки сети, входящие в i-ый узел. Пусть λ_i^{+} – интенсивность потока запросов, λ_{il}^{-} – интенсивности потоков отрицательных заявок ($l = \overline{1,\infty}$), $\tilde{n}_i(t)$ – число запросов в системе в момент времени t. Процесс $\tilde{n}_i(t)$ является Марковским с пространством состояний Z_{+}. Найдем стационарное распределение процесса $\tilde{n}_i(t)$. Составим систему уравнений равновесия:

$$\lambda_i^{+} p_i(n_i) =$$
$$= (\mu_i + \upsilon_i) p_i(n_i + 1) + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^{-} p_i(n_i + l)\right), \quad (2.1)$$
$$n_i = 0, 1, \ldots$$

Подставим $p_i(n_i) = z_i^{n_i}$ в (2.1). Получим характеристическое уравнение:

$$g(z_i) = (\mu_i + \upsilon_i) z_i + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^{-} z_i^{\,l}\right) - \lambda_i^{+} =$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{s} \lambda_{is}^{-} z_i^{\,l}\right) + (\mu_i + \upsilon_i) z_i - \lambda_i^{+} = 0. \quad (2.2)$$

Будем предполагать, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^{-} < \infty, \ i = \overline{1,N}.$$

Докажем, что при выполнении условия

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^{+}}{\mu_i + \upsilon_i + \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^{-}} < 1, \quad (2.3)$$

процесс $\tilde{n}_i(t)$ будет эргодическим. Действительно, $g(0) = -\lambda_i^{+} < 0$ и, в силу (2.3),

$$g(1) = \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^{-} + (\mu_i + \upsilon_i) - \lambda_i^{+} > 0.$$

Так как функция $g(z_i)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то для уравнения (2.2) существует корень $z_{i0} \in (0,1)$. Следовательно, уравнение равновесия (2.1) имеет решение $p_i(n_i) = z_{i0}^{n_i}$. Учитывая нормировку $\sum_{n_i=0}^{\infty} p_i(n_i) = 1$, получаем:

$$p_i(n_i) = (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i}, \ n_i = 0, 1, \ldots \quad (2.4)$$

Далее воспользуемся эргодической теоремой Фостера [2]. При выполнении условия (2.3) уравнение (2.2) имеет корень $z_{i0} \in (0,1)$, при этом (2.4) – частное решение системы уравнений равновесия (2.1). Сумма ряда равна единице:

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} \left| p_i(n_i) \right| = \sum_{n_i=0}^{\infty} (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = 1.$$

Значит, имеет место следующая теорема.

***Теорема* 2.1.** *Для эргодичности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \upsilon_i + \sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^-} < 1.$$

В этом случае стационарное распределение цепи имеет форму геометрического распределения $p_i(n_i) = (1 - z_{i0})z_{i0}^{n_i}$, $n_i = 0,1,\ldots$.

Всюду далее предполагается, что средняя интенсивность «вычеркивания» заявок во всех узлах конечна, т.е. выполняется условие

$$\sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^- < \infty,\ i = \overline{1,N}.$$

Уравнение (2.2) при $z = z_{i0}$ принимает форму тождества

$$(\mu_i + \upsilon_i)z_{i0} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{s=l}^{\infty}\lambda_{is}^- z_{i0}^l\right) - \lambda_i^+ = 0,\ i = \overline{1,N}. \quad (2.5)$$

При выполнении условий эргодичности

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \upsilon_i + \sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^-} < 1,\ i = \overline{1,N}, \quad (2.6)$$

стационарное распределение изолированного узла имеет форму

$$p_i(n_i) = (1 - z_{i0})z_{i0}^{n_i},\ n_i = 0,1,\ldots,\ i = \overline{1,N}. \quad (2.7)$$

Составим для сети систему уравнений трафика. Вероятность занятости прибора в i-м узле в стационарном режиме будет равна $1 - p_i(0) = z_{i0}$. Поэтому:

$$\lambda_i^+ = \Lambda p_i + \sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+),\ i = \overline{1,N}, \quad (2.8)$$

$$\lambda_{il}^- = \lambda_l q_{il} + \sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jil}^- + \upsilon_j r_{jil}^-),$$
$$i = \overline{1,N},\ l = \overline{1,\infty}, \quad (2.9)$$

Можно доказать, что система (2.8)–(2.9) имеет строго положительное решение.

Составим уравнения глобального равновесия для сети:

$$p(\vec{n})\sum_{i=1}^{N}\left[\Lambda p_i + \left(\mu_i + \upsilon_i + \sum_{l=1}^{\infty}\lambda_i q_{il}\right)I_{\{n_i \neq 0\}}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\Big\{p(\vec{n} - \vec{e}_i)\Lambda p_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \quad (2.10)$$
$$+ p(\vec{n} + \vec{e}_i)[\mu_i p_{i0} + \upsilon_i r_{i0} + \lambda_{i1} + (\lambda_{i2} + \lambda_{i3} + \ldots)I_{\{n_i = 0\}}] +$$
$$+ \sum_{l=2}^{\infty} p(\vec{n} + l\vec{e}_i)[\lambda_i q_{il} + (\lambda_i q_{il+1} + \lambda_i q_{il+2} + \ldots)I_{\{n_i = 0\}}] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}\Big[p(\vec{n} + \vec{e}_j - \vec{e}_i)(\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+)I_{\{n_i \neq 0\}} +$$
$$+ \sum_{l=1}^{\infty} p(\vec{n} + \vec{e}_j + l\vec{e}_i)\times$$
$$\times\Big(\mu_j(p_{jil}^- + (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \ldots)I_{\{n_i = 0\}}\Big) +$$
$$+ \upsilon_j(r_{jil}^- + (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \ldots)I_{\{n_i = 0\}})) +$$
$$+ p(\vec{n} + \vec{e}_j)(\mu_j(p_{ji1}^- + p_{ji2}^- + \ldots) +$$
$$+ \upsilon_j(r_{ji1}^- + r_{ji2}^- + \ldots))I_{\{n_i = 0\}}\Big]\Big\},\ \vec{n} \in Z_+^N.$$

Здесь $\vec{e}_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где i-я компонента равна единице, I_A – индикатор события A:

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ произошло;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что вероятности, задаваемые формулой

$$p(\vec{n}) = \prod_{i=1}^{N} p_i(n_i),\ \vec{n} \in Z_+^N, \quad (2.11)$$

где $p_i(n_i)$ определяются формулой (2.7) при выполнении (2.6) удовлетворяют уравнениям (2.10).

Разобьем (2.10) на уравнения локального равновесия. Учитывая, что $I_{\{n_i = 0\}} = 1 - I_{\{n_i \neq 0\}}$, приравняем слагаемые, содержащие множитель $I_{\{n_i \neq 0\}}$. Получим первое уравнение. Приравнивая слагаемые не содержащие множитель $I_{\{n_i \neq 0\}}$, получим второе уравнение

$$p(\vec{n})\sum_{i=1}^{N}\left[\mu_i + \upsilon_i + \sum_{l=1}^{\infty}\lambda_i q_{il}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\Big\{\ p(\vec{n} - \vec{e}_i)\Lambda p_i - p(\vec{n} + \vec{e}_i)[\lambda_i q_{i2} + \lambda_i q_{i3} + \ldots] -$$
$$- \sum_{l=2}^{\infty} p(\vec{n} + l\vec{e}_i)[\lambda_i q_{il+1} + \lambda_i q_{il+2} + \ldots] + \quad (2.12)$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}\Big[p(\vec{n} + \vec{e}_j - \vec{e}_i)(\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+) -$$
$$- \sum_{l=1}^{\infty} p(\vec{n} + \vec{e}_j + l\vec{e}_i)(\mu_j(p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \ldots) +$$
$$+ \upsilon_j(r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \ldots)) -$$
$$- p(\vec{n} + \vec{e}_j)(\mu_j(p_{ji1}^- + p_{ji2}^- + \ldots) +$$
$$+ \upsilon_j(r_{ji1}^- + r_{ji2}^- + \ldots))\Big]\Big\},\ \vec{n} \in Z_+^N,$$

$$p(\vec{n})\sum_{i=1}^{N}\Lambda p_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\{p(\vec{n} + \vec{e}_i)[\mu_i p_{i0} + \upsilon_i r_{i0} + \lambda_i q_{i1} + \lambda_i q_{i2} + \ldots] +$$
$$+ \sum_{l=2}^{\infty} p(\vec{n} + l\vec{e}_i)[\lambda_i q_{il} + \lambda_i q_{il+1} + \ldots] + \quad (2.13)$$
$$+ \sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{\infty} p(\vec{n} + \vec{e}_j + l\vec{e}_i)(\mu_j(p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \ldots) +\right.$$
$$+ \upsilon_j(r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \ldots)) + p(\vec{n} + \vec{e}_j)(\mu_j(p_{ji1}^- + p_{ji2}^- + \ldots) +$$
$$\left.+ \upsilon_j(r_{ji1}^- + r_{ji2}^- + \ldots))\right]\Big\},\ \vec{n} \in Z_+^N.$$

В (2.12) приравняем соответствующие слагаемые в суммах слева и справа:

$$p(\vec{n})\left(\mu_i + \upsilon_i + \sum_{l=1}^{\infty}\lambda_i q_{il}\right) =$$
$$= p(\vec{n} - \vec{e}_i)\Lambda p_i - p(\vec{n} + \vec{e}_i)[\lambda_i q_{i2} + \lambda_i q_{i3} + \ldots] -$$

$$-\sum_{l=2}^{\infty} p(\vec{n}+l\vec{e}_i)[\lambda_i q_{il+1}+\lambda_i q_{il+2}+\ldots]+ \tag{2.14}$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\Big[p(\vec{n}+\vec{e}_j-\vec{e}_i)(\mu_j p_{ji}^{+}+\upsilon_j r_{ji}^{+})-$$
$$-\sum_{l=1}^{\infty} p(\vec{n}+\vec{e}_j+l\vec{e}_i)(\mu_j(p_{jil+1}^{-}+p_{jil+2}^{-}+\ldots)+$$
$$+\upsilon_j(r_{jil+1}^{-}+r_{jil+2}^{-}+\ldots))-p(\vec{n}+\vec{e}_j)(\mu_j(p_{ji1}^{-}+p_{ji2}^{-}+\ldots)+$$
$$+\upsilon_j(r_{ji1}^{-}+r_{ji2}^{-}+\ldots))\Big],\ \vec{n}\in Z_{+}^{N},\ i=\overline{1,N}.$$

Очевидно, что из (2.13), (2.14) следует (2.10).

Разделим (2.14) на $p(\vec{n})$. Подставим (2.11) и используя (2.5), (2.8)–(2.9), получим:

$$\mu_i+\upsilon_i+\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_i q_{il}=$$
$$=\frac{\Lambda p_i}{z_{i0}}-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^{l}\lambda_i q_{is}+\frac{1}{z_{i0}}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{ji}^{+}+\upsilon_j r_{ji}^{+})-$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\Bigg[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0}z_{i0}^{l}(\mu_j(p_{jil+1}^{-}+p_{jil+2}^{-}+\ldots)+$$
$$+\upsilon_j(r_{jil+1}^{-}+r_{jil+2}^{-}+\ldots))+z_{j0}(\mu_j(p_{ji1}^{-}+p_{ji2}^{-}+\ldots)+$$
$$+\upsilon_j(r_{ji1}^{-}+r_{ji2}^{-}+\ldots))\Bigg]=$$
$$=\frac{\Lambda p_i}{z_{i0}}-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^{l}\lambda_i q_{is}+\frac{\lambda_i^{+}-\Lambda p_i}{z_{i0}}-$$
$$-\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}\left(\mu_j\sum_{s=l+1}^{\infty} p_{jis}^{-}+\upsilon_j\sum_{s=l+1}^{\infty} r_{jis}^{-}\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{N} z_{j0}\left(\mu_j\sum_{s=1}^{\infty} p_{jis}^{-}+\upsilon_j\sum_{s=1}^{\infty} r_{jis}^{-}\right)=$$
$$=\frac{\lambda_i^{+}}{z_{i0}}-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^{l}\lambda_i q_{is}-$$
$$-\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jis}^{-}+\upsilon_j r_{jis}^{-})-$$
$$-\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jis}^{-}+\upsilon_j r_{jis}^{-})=$$
$$=\frac{\lambda_i^{+}}{z_{i0}}-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^{l}\lambda_i q_{is}-$$
$$-\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l+1}^{\infty}(\lambda_{is}^{-}-\lambda_i q_{is})-\sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_{is}^{-}-\lambda_i q_{is})=$$
$$=\frac{\lambda_i^{+}}{z_{i0}}-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^{l}\lambda_i q_{is}-$$
$$-\frac{1}{z_{i0}}\sum_{l=2}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{\infty}\lambda_{is}^{-}+\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l+1}^{\infty}\lambda_i q_{is}-\sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_{is}^{-}-\lambda_i q_{is})=$$
$$=\frac{\lambda_i^{+}}{z_{i0}}-\frac{1}{z_{i0}}\left(\lambda_i^{+}-(\mu_i+\upsilon_i)z_{i0}-z_{i0}\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_{is}^{-}\right)-$$
$$-\sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_{is}^{-}-\lambda_i q_{is})=\mu_i+\upsilon_i+\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_i q_{is},$$

т. е. (2.14) выполняется.

Лемма 2.1. *Для решений уравнений трафика (2.8)–(2.9) будет справедливо следующее тождество*:

$$\sum_{i=1}^{N} z_{i0}(\mu_i p_{i0}+\upsilon_i r_{i0})=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\Lambda p_i-\lambda_i^{+}+\sum_{l=1}^{\infty}(\lambda_i q_{il}-\lambda_{il}^{-})+z_{i0}(\mu_i+\upsilon_i)\right). \tag{2.15}$$

Действительно. Просуммируем (2,9) по $l=\overline{1,\infty}$, после чего полученное уравнение вместе с уравнением глобального равновесия (2.10) суммируем по $i=\overline{1,N}$. Учитываем, что

$$p_{i0}=1-\sum_{j=1}^{N}\left(p_{ij}^{+}+\sum_{l=1}^{\infty} p_{ijl}^{-}\right),$$
$$r_{i0}=1-\sum_{j=1}^{N}\left(r_{ij}^{+}+\sum_{l=1}^{\infty} r_{ijl}^{-}\right),\ i=\overline{1,N}.$$

В итоге получаем (2.15).

Далее разделим (2.13) на $p(\vec{n})$. Подставим в полученное равенство (2.11) и используя (2.5), (2.8)–(2.9), а также (2.15) получим:

$$\sum_{i=1}^{N}\Lambda p_i=\sum_{i=1}^{N}\Bigg\{z_{i0}[\mu_i p_{i0}+\upsilon_i r_{i0}+\lambda_i q_{i1}+\lambda_i q_{i2}+\ldots]+$$
$$+\sum_{l=2}^{\infty} z_{i0}^{l}[\lambda_i q_{il}+\lambda_i q_{il+1}+\ldots]+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\Bigg[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0}z_{i0}^{l}(\mu_j(p_{jil}^{-}+p_{jil+1}^{-}+\ldots)+$$
$$+\upsilon_j(r_{jil}^{-}+r_{jil+1}^{-}+\ldots))+$$
$$+z_{j0}(\mu_j(p_{ji1}^{-}+p_{ji2}^{-}+\ldots)+\upsilon_j(r_{ji1}^{-}+r_{ji2}^{-}+\ldots))\Bigg]\Bigg\}=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\Bigg\{z_{i0}[\mu_i p_{i0}+\upsilon_i r_{i0}]+\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{\infty}\lambda_i q_{is}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\Bigg[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0}z_{i0}^{l}\left(\mu_j\sum_{s=l}^{\infty} p_{jis}^{-}+\upsilon_j\sum_{s=l}^{\infty} r_{jis}^{-}\right)+$$
$$+z_{j0}\left(\mu_j\sum_{s=1}^{\infty} p_{jis}^{-}+\upsilon_j\sum_{s=1}^{\infty} r_{jis}^{-}\right)\Bigg]\Bigg\}=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\Bigg\{\Lambda p_i-\lambda_i^{+}+\sum_{l=1}^{\infty}(\lambda_i q_{il}-\lambda_{il}^{-})+z_{i0}(\mu_i+\upsilon_i)+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{\infty}\lambda_i q_{is}+\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jis}^{-}+\upsilon_j r_{jis}^{-})+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jis}^{-}+\upsilon_j r_{jis}^{-})\Bigg\}=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\Bigg\{\Lambda p_i-\lambda_i^{+}+\sum_{l=1}^{\infty}(\lambda_i q_{il}-\lambda_{il}^{-})+z_{i0}(\mu_i+\upsilon_i)+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{\infty}\lambda_i q_{is}+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{\infty}(\lambda_{is}^{-}-\lambda_i q_{is})+\sum_{s=1}^{\infty}(\lambda_{is}^{-}-\lambda_i q_{is})\Bigg\}=$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \Lambda p_i - \lambda_i^+ + z_{i0}(\mu_i + \upsilon_i) + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Lambda p_i,$$

т.е. (2.13) также выполняется.

Очевидно, что многомерная цепь Маркова $\vec{n}(t)$ является неприводимой и консервативной. Так как интенсивности выхода из состояний ограничены сверху

$$q(\vec{n}) \le \sum_{i=1}^{N} \left[\Lambda_i + \mu_i + \upsilon_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{il} \right],$$

то цепь регулярна. Доказано, что (2.11) является решением (2.10). При выполнении условий эргодичности (2.6) ряд

$$\sum_{\vec{n}\in X} p(\vec{n}) = \sum_{\vec{n}\in X} \prod_{i=1}^{N} p_i(n_i) =$$

$$= \sum_{\vec{n}\in X} \prod_{i=1}^{N} (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_N=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \sum_{n_i=0}^{\infty} (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = 1.$$

Значит, вероятности, задаваемые формулой (2.11) будут эргодическим распределением многомерного процесса $\vec{n}(t)$. Тем самым имеет место следующая теорема.

***Теорема* 2.2.** При выполнении условий

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \upsilon_i + \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^-} < 1, \ i = \overline{1,N}$$

цепь Маркова $\vec{n}(t)$ эргодическая, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения $p(\vec{n}) = \prod_{i=1}^{N} p_i(n_i),\ \vec{n} \in Z_+^N$ с множителями $p_i(n_i) = (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i},\ n_i = 0,1,\dots,\ i = \overline{1,N}$, где $z_{i0} \in (0,1),\ i = \overline{1,N}$ – корни уравнений

$$(\mu_i + \upsilon_i) z_{i0} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- z_{i0}^l \right) - \lambda_i^+ = 0, \ i = \overline{1,N},$$

а $\left\{ \lambda_i^+, \lambda_{il}^-,\ i = \overline{1,N},\ l = \overline{1,\infty} \right\}$ – решение системы уравнений трафика

$$\begin{cases} \lambda_i^+ = \Lambda_i + \sum_{j=1}^{N} z_{j0} (\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+), \ i = \overline{1,N}; \\ \lambda_{il}^- = \lambda_{il} + \sum_{j=1}^{N} z_{j0} (\mu_j p_{jil}^- + \upsilon_j r_{jil}^-), \ i = \overline{1,N}, \ l = \overline{1,\infty}. \end{cases}$$

Заключение

В работе исследована открытая сеть массового обслуживания со счетным числом экспоненциальных потоков отрицательных заявок, поступающих в узлы сети. Матрицы маршрутизации обслуженных запросов и запросов, не дождавшихся обработки, различны. Предполагается, что средняя интенсивность потоков отрицательных заявок поступающих в узлы конечна. Найдены условия эргодичности случайного Марковского процесса, описывающего функционирование сети. Получено стационарное распределение этого процесса, имеющее форму произведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский*, *Ю.В*. Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания / Ю.В. Малинковский, Н.Н. Бородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 64–68.

2. *Бочаров*, *П.П.* Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – Москва: РУДН, 1995. – 529 с.

3. *Гихман*, *И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.

4. *Gelenbe*, *E.* Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers. / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol .28. – P. 656–663.

Поступила в редакцию 11.05.2023.

Информация об авторах

Бородин Николай Николаевич – старший преподаватель

Малинковский Юрий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор